船舶瞬时转动中心反演：规范不变性与多项式约束破缺

郭森鑫[1]　黄斌[2]　王明丰[2]

（1. 中国船舶及海洋工程设计研究院，上海海迅机电工程有限公司，上海 200011；
2. 中国船舶及海洋工程设计研究院，上海 200011）

摘要：

甲板运动补偿与相对导航要求实时、准确地获取船舶瞬时转动中心（CoR）位置，而瞬时转动中心随浮态、海况、装载及机动时变且无法直接测量。本文从刚体运动学证明：仅凭船体测点的位置或速度观测，平动量与瞬时转动中心不可分离——反演具有规范不变性，无约束适应度曲面完全平坦，任何优化算法均无法收敛。多项式约束平动模型破缺该不变性，将反演退化为线性最小二乘并获得闭式全局最优解；该框架对多天线 GNSS（位置域）与多 INS（速度域）观测严格对偶成立，运动激励分配理论预言瞬时转动中心纵轴分量最难辨识、垂轴最易。仿真、五档海况激励实验与海上实船验证表明，INS 方案瞬时转动中心均方根误差降至 0.54 m，约为卫星方案的六成；两套独立系统反演结果在显著生摇时段内差值低至 Z 向 2.0 m、Y 向 6.5 m。该方法无需船舶动力学模型，为低成本甲板相对导航基准提供了严格的理论基础与可行的双系统算法框架。

关键词：瞬时转动中心估计　规范不变性　多项式约束　多天线 GNSS　多 INS　甲板运动补偿

分类号：U666.1

Ship Center-of-Rotation Inversion: Gauge Invariance and Polynomial-Constraint Breaking

GUO SENXIN[1], HUANG BIN[2], WANG MINGFENG[2]

(1. Shanghai Haixun Mech-electrical Engineering Company Limited, Marine Design and Research Institute of China, Shanghai 200011, China;
2. Marine Design and Research Institute of China, Shanghai 200011, China)

Abstract：

Deck motion compensation and relative navigation require real-time, accurate knowledge of a ship's center of rotation (CoR), which varies with floating condition, sea state, loading, and maneuvers and cannot be measured directly. We prove from rigid-body kinematics that, using only position or velocity observations of hull-mounted measurement points, the translation and the CoR cannot be separated: the inversion possesses gauge invariance, the unconstrained fitness surface is completely flat, and no optimization algorithm can converge. A polynomial-constrained translation model breaks this invariance, reducing the inversion to linear least squares with a closed-form global optimum. The framework holds in strict duality for multi-antenna GNSS (position domain) and multi-INS (velocity domain) observations, and a motion-excitation allocation theory predicts the longitudinal CoR component hardest to identify and the vertical easiest. Simulations, five-level sea-state

国家高端交流平台

excitation experiments, and at-sea validation show that the multi-INS scheme reduces the CoR root-mean-square error to 0.54 m, about 60% of the GNSS scheme, and the two independent systems agree to within 2.0 m (Z) and 6.5 m (Y) in strongly excited intervals. Requiring no ship dynamics model, the method provides a rigorous theoretical basis and a feasible dual-system framework for low-cost deck-relative navigation.
Keywords: center of rotation estimation, gauge invariance, polynomial constraint, multi-antenna GNSS, multi-INS, deck motion compensation

1 引言

1.1 背景与工程意义

在波浪中航行的船舶经历纵荡、横荡、垂荡与横摇、纵摇、艏摇构成的复杂六自由度运动。精确描述船舶六自由度运动场，是航行安全、动力定位、海上货物转运、直升机甲板作业与甲板运动补偿等应用的基础[1]。船舶运动学描述的核心是瞬时转动中心（CoR）——描述船舶旋转运动的瞬时转动支点，其位置随浮态、海况、装载与机动持续迁移；而传统船舶运动建模普遍将瞬时转动中心固定于重心或船舯点以解耦平动与旋转方程，这一简化在变化浪况下引入系统性误差[1]。多天线 GNSS 能以厘米级精度输出船体测点坐标并实现亚度级全姿态估计[2,3]，GNSS/INS 紧耦合进一步增强稳健性[4]；与之对偶，多惯性导航系统（INS）可提供各测点速度矢量。然而，多测点位置/速度信息迄今仅用于姿态确定，从未拓展至瞬时转动中心本身的估计——瞬时转动中心仍是由流体动力模型推导的事后量，而非直接从传感器数据估计的观测运动学参数。

1.2 文献综述

既有研究可归纳为四条线索。其一，流体动力建模与固定瞬时转动中心范式：Fossen[1]建立了船舶流体动力学与运动控制的完整三/六自由度建模框架，几乎所有商用操纵模拟器与动力定位系统均建立其上，但固定原点假设本质是建模简化而非物理真实。其二，基于位置/速度测量的运动与姿态确定：Teunissen[2]建立了 GNSS 罗经整数最小二乘理论，Giorgi 等[3]以多约束 LAMBDA 方法实现瞬时模糊度解算，Henkel[4]研究了 GNSS/INS 紧耦合，Teunissen 等[5]完成多平台载波相位姿态实测，Zou 等[6]提出船舶运动估计的自适应鲁棒容积卡尔曼滤波；Titterton 和 Weston[7]与 Groves[8]分别为捷联 INS 与组合导航的标准参考，Teunissen 和 Montenbruck[9]主编的手册提供 GNSS 数据处理综合参考。其三，点集配准：Kabsch[10]以 SVD 给出最小二乘旋转闭式解，Besl 和 McKay[11]拓展为 ICP 算法，但瞬时转动中心估计还需从旋转位移场分离时变平动分量。其四，跨学科工作[12-14]均未处理船舶时变瞬时转动中心，也未建立双域统一可辨识性理论。

综上仍存在七处空白：固定瞬时转动中心局限未经实测考察（G1）；测点位置/速度信息利用不足（G2）；规范不变性认识空白（G3）；无约束反演失效未经证明（G4）；缺乏多项式约束反演框架（G5）；速度域信息未利用（G6）；跨域统一视角缺失（G7）。

1.3 本文贡献

本文主要贡献：（1）首次证明船舶瞬时转动中心反演中无约束条件下平动量与瞬时转动中心构成规范自由度，适应度函数完全平坦（回应 G3、G4；第 2 章）；

（2）提出窗口内低阶多项式平动模型，将反演转化为普通线性最小二乘，给出闭式全局最优解（回应 G5；第 2 章）；（3）证明速度域存在与位置域严格对偶的规范不变性，同一闭式求解器原样复用（回应 G6、G7；第 2.4 节）；（4）建立绕轴旋转对该轴方向瞬时转动中心位置失明的分配关系，预测并验证纵轴最弱、垂轴最优的精度梯度（回应 G2；第 2.5 节与第 3.3 节）；（5）以多天线 GNSS 和多 INS 独立输出瞬时转动中心，仿真与实船互验证（回应 G1；第 3 章）；（6）提出近岸校核 INS 零偏、远海自主的双系统融合框架（回应 G1、G2；第 5 章）。

本文其余部分安排如下：第 2 章给出坐标系略述、规范不变性框架与多项式约束破缺方法；第 3 章报告双系统仿真验证与运动激励实验；第 4 章报告海上实船验证；第 5 章给出双系统融合策略；第 6 章总结全文。

2　坐标系、规范不变性与多项式约束破缺方法

2.1　坐标系与观测模型略述

本文的“瞬时转动中心”指刚体运动学意义上随浮态、海况、装载与机动实时变化的瞬时转动中心（不同于稳心与重心）。局部 ENU 参考坐标系以岸基站（30.0°N, 122.0°E, 0 m）为原点，船体坐标系刚性固连于船舶（X 指向船首、Y 指向右舷、Z 向下）；四副 GNSS 天线以共面（布局 A）与非共面（布局 B，天线 3 升至桅杆顶部）两种配置安装，多 INS 与 GNSS 天线共点安装以保证双域几何条件一致。在每个观测历元，天线 ENU 坐标满足刚体变换：

$$\boldsymbol{X}_i(t_k) = \boldsymbol{X}_{\mathrm{CoR}}(t_k) + \boldsymbol{R}(t_k)[\boldsymbol{P}_i^b - \boldsymbol{C}_b(t_k)]. \tag{1}$$

其中 $\mathbf{R}(t_k)$ 为旋转矩阵，$\mathbf{P}_i^b$ 为天线船体坐标，$\mathbf{C}_b(t_k)$ 为瞬时转动中心船体坐标——即本文欲估计的未知量。与位置观测对偶，多 INS 提供速度观测[7,8]，由刚体运动学任意一点的速度满足

$$\boldsymbol{v}_i(t_k) = \boldsymbol{v}_{\mathrm{CoR}}(t_k) + \boldsymbol{\omega}(t_k) \times (\boldsymbol{R}(t_k)(\boldsymbol{P}_i^b - \boldsymbol{C}_b)). \tag{2}$$

其中 $\mathbf{v}_{\mathrm{CoR}}(t_k)$ 为瞬时转动中心平动速度，$\boldsymbol{\omega}(t_k)$ 为船体角速度（ENU 系）。式(2)与式(1)具有对偶结构：位置量与速度量、姿态矩阵与角速度反对称矩阵一一对应。GNSS 与 INS 的误差分别按一阶 Gauss–Markov 过程与实际惯性器件误差特性建模（速度通道各向异性与主流中精度 INS 指标一致[15,16]，陀螺建模遵循 IEEE 惯例[17,18]；坐标系变换遵循标准约定[1,19]）。本节全部真值数据仅用于误差评估，绝不参与反演。

2.2　规范不变性：问题与后果

瞬时转动中心反演的本质困难在于刚体运动学中的规范不变性：仅凭测点的位置或速度观测，平动量与瞬时转动中心不可分离。定义合成平动量 $\mathbf{u}(t)$：

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{T}_{\mathrm{geo}}(t) - \boldsymbol{R}(t)\,\boldsymbol{C}_b(t). \tag{3}$$

给定四副天线 ENU 观测，可经基线差分与 Kabsch SVD 唯一确定姿态、经天线质心确定合成平动 $\mathbf{u}$。然而 $\mathbf{T}_{\mathrm{geo}}$ 与 $\mathbf{C}_b$ 各自的分量无法从 $\mathbf{u}(t)$ 中分离：对任意 $\boldsymbol{\delta}$，规范变换

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{geo}}' = \boldsymbol{T}_{\mathrm{geo}} + \boldsymbol{\delta}, \qquad \boldsymbol{C}_b' = \boldsymbol{C}_b + \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{\delta}, \tag{4}$$

保持 $\mathbf{u}$ 不变，观测方程完全不变——瞬时转动中心与地心平动构成规范自由度。即使姿态已知，直接求解瞬时转动中心也需已知平动量，而平动量的获取本质上又需要已知瞬时转动中心，形成循环依赖；单历元层面系统欠定，任何单

历元联合优化均无法收敛。进一步，当以天线质心为参考点评估预测位置时，瞬时转动中心项恰好抵消：

结果 1（位置域规范不变性）. 当使用质心导出的$\mathbf{T}_{\mathrm{geo}}(t_k)$表达式评估预测天线位置时，预测仅通过残差项依赖于差$(\mathbf{C}_b(t_k) - \widehat{\mathbf{C}}_b)$。若无约束模型将$\mathbf{T}_{\mathrm{geo}}(t_k)$作为逐历元自由参数，则瞬时转动中心项被完全吸收进$\mathbf{T}_{\mathrm{geo}}(t_k)$，使适应度函数与$\widehat{\mathbf{C}}_b$无关。

该结果由数值实验定量验证（图 1）。物理上，瞬时转动中心与地心平动规范等价：瞬时转动中心的任意变化都可被平动量相应变化精确补偿——这是根本的数学恒等式而非数值问题；除非额外约束打破等价性，否则瞬时转动中心无法从测量中观测。结论可直接推广至多历元窗口，任何无约束优化方法在无约束下均完全失效。图 1 以布局 B 数据固定历元扫描候选瞬时转动中心的 X 分量：无约束适应度完全平坦，加入二阶多项式约束后出现唯一最小值，可辨识性确立。

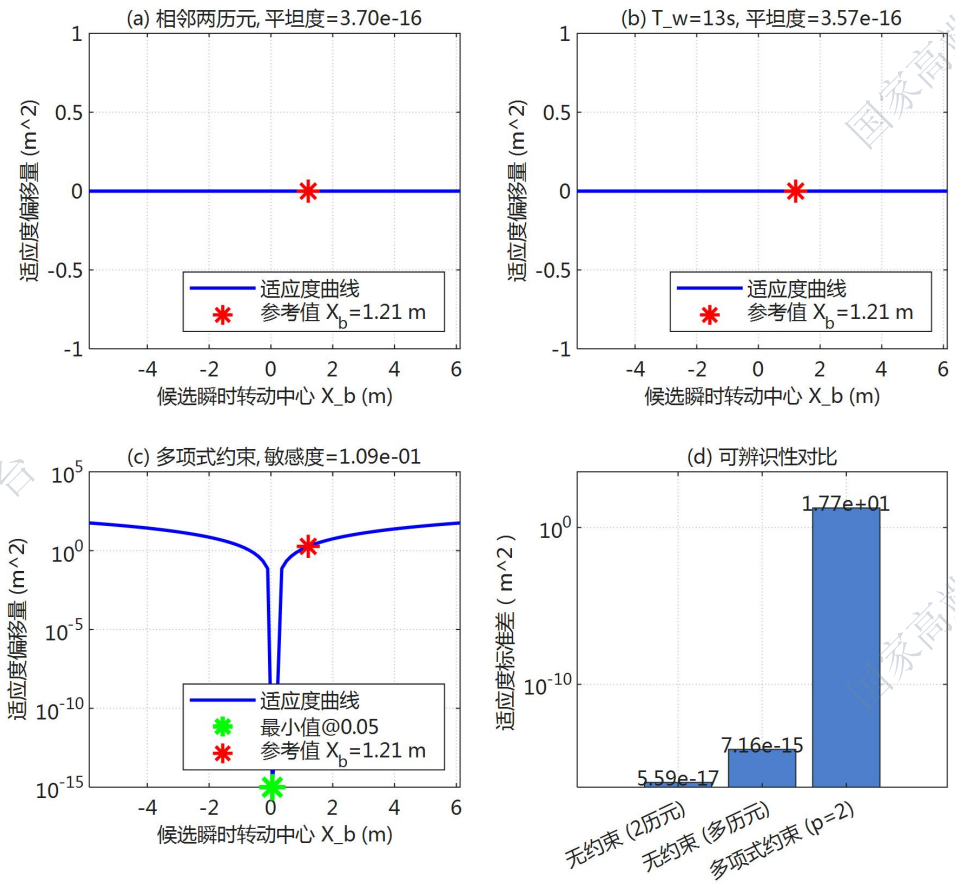


图 1 位置域规范不变性严格论证：无约束适应度完全平坦，加入 $p = 2$ 多项式约束后出现唯一最小值。

2.3 多项式约束破缺与线性最小二乘闭式解

规范不变性的根源在于平动在每个历元独立变化，恰好补偿任意候选瞬时转动中心的偏差。破缺之道：短时间窗口内船舶平动光滑，可用 p 阶多项式近似，

剥夺其逐历元自由。为避免大绝对 ENU 偏移的数值灾难，采用差分相对平动模型——瞬时转动中心窗口内恒定，平动分解为基准平动（由初始历元计算）与不含常数项的 p 阶相对平动多项式：

$$\boldsymbol{T}_{\text{geo}}(t_k) = \boldsymbol{T}_0(\boldsymbol{C}_b) + \Delta\boldsymbol{T}(\Delta t_k), \tag{5}$$

$$\boldsymbol{T}_0(\boldsymbol{C}_b) = \bar{\boldsymbol{X}}_{k_0} - \boldsymbol{R}_{k_0}(\bar{\boldsymbol{P}}^b - \boldsymbol{C}_b), \tag{6}$$

$$\Delta\boldsymbol{T}(\Delta t_k) = \sum_{j=1}^{p} \boldsymbol{a}_j\, \Delta t_k^j. \tag{7}$$

其中 Δt_k 为窗口内相对时间，$\mathbf{a}_j$ 为待估多项式系数。待估参数压缩为 $\mathbf{C}_b$ 与 $\mathbf{a}_j$（共 3+3p 个标量），规范不变性由此被破缺。对候选参数 $\mathbf{x} = [\mathbf{C}_b; \mathbf{a}_1; \ldots; \mathbf{a}_p]$，窗口内第 k 历元天线 i 的预测位置与适应度函数（四天线位置残差平方和的平均）为

$$\widehat{\boldsymbol{X}}_i(k) = \boldsymbol{R}_k(\boldsymbol{P}_i^b - \boldsymbol{C}_b) + \boldsymbol{T}_0(\boldsymbol{C}_b) + \Delta\boldsymbol{T}(\Delta t_k), \tag{8}$$

$$\mathcal{F}_{\text{c}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{N_w \cdot M} \sum_{k=k_0}^{k_{\text{end}}} \sum_{i=1}^{M} \| \boldsymbol{X}_i^{\text{meas}}(k) - \widehat{\boldsymbol{X}}_i(k;\boldsymbol{x}) \|^2. \tag{9}$$

本研究固定 p=2（恒定加速度模型）：数十秒窗口内船舶惯性主导、加速度近乎恒定；p=1 无法描述波浪引起的加速度变化，p≥3 自由度冗余易拟合噪声；其系数物理意义明确，网格扫描预实验证实 p=2 泛化最优。反演参数维度为

$$dim(\boldsymbol{x}) = 3 + 3p = 3 + 6 = 9. \tag{10}$$

姿态由天线基线 Kabsch SVD 预先独立解算，与平动反演完全解耦，不涉及任何平动真值：

$$\boldsymbol{H}_k = \boldsymbol{P}_{\text{base}}\, \boldsymbol{B}_{\text{meas},k}^T = \boldsymbol{U}_k\, \boldsymbol{\Sigma}_k\, \boldsymbol{V}_k^T, \qquad \widehat{\boldsymbol{R}}_k = \boldsymbol{V}_k\, \text{diag}\left(1,1, det\left(\boldsymbol{V}_k \boldsymbol{U}_k^T\right)\right) \boldsymbol{U}_k^T. \tag{11}$$

姿态估计精度由 RTK 基线精度决定，期望角度误差约 1.14°（仿真中布局 B 为 0.63°）：

$$\delta\theta \approx \frac{\sqrt{2}\,\sigma}{S_{min}} \approx \frac{0.107\,\text{m}}{5.41\,\text{m}} \approx 1.14^\circ, \quad \text{（仿真：布局 B 为0.63°）}. \tag{12}$$

其中 σ 为 GNSS 位置噪声标准差，$S_{\min}$ 为基线几何矩阵的最小奇异值（布局 B 为 5.41 m）。

将差分模型代入预测方程并整理，观测减已知量后，未知参数仅以线性形式出现：

$$\underbrace{\boldsymbol{X}_i^{\text{meas}}(k) - [\boldsymbol{R}_k \boldsymbol{P}_i^b + \bar{\boldsymbol{X}}_{k_0} - \boldsymbol{R}_{k_0} \bar{\boldsymbol{P}}^b]}_{\text{已知观测 } b_{i,k}} = \underbrace{(\boldsymbol{R}_{k_0} - \boldsymbol{R}_k)\boldsymbol{C}_b}_{\boldsymbol{C}_b\text{系数}} + \sum_{j=1}^{p} \boldsymbol{a}_j\, \Delta t_k^j. \tag{13}$$

堆叠所有历元、天线与 ENU 分量，得超定线性系统

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{14}$$

设计矩阵第 k 块的瞬时转动中心系数为 $\mathbf{R}_{k_0} - \mathbf{R}_k$，多项式系数块为 $\Delta t_k^j \cdot \mathbf{I}_3$（p=2）。反演等价于无约束线性最小二乘，闭式全局最优解为

$$\hat{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{b}. \tag{15}$$

实际计算采用 QR 分解，数值稳定、微秒级；解是确定性、可重复、保证全局最优的，不存在局部极小或收敛失败问题。提取瞬时转动中心估计 $\widehat{\mathbf{C}}_b = \hat{\mathbf{x}}(1 : 3)$。

2.4 速度域对偶框架

将框架推广至速度域：以多 INS 的 ENU 速度为观测量，速度域存在与位置域形式完全对称的规范不变性，同样的破缺机制与闭式解依然适用。引入反对称矩阵后式(2)可写为

$$\boldsymbol{v}_i(t_k) = \boldsymbol{v}_{\mathrm{CoR}}(t_k) + [\boldsymbol{\omega}(t_k)]_\times \boldsymbol{R}(t_k)\boldsymbol{P}_i^b - [\boldsymbol{\omega}(t_k)]_\times \boldsymbol{R}(t_k)\,\boldsymbol{C}_b. \tag{16}$$

测量值受零均值速度噪声污染：

$$\boldsymbol{v}_i^{\mathrm{meas}}(t_k) = \boldsymbol{v}_i(t_k) + \boldsymbol{\eta}_i(t_k), \qquad \boldsymbol{\eta}_i(t_k) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_v^2 \boldsymbol{I}). \tag{17}$$

定义合成速度 $\mathbf{w}(t_k)$，则对任意 INS 均有 $\mathbf{K}_i(t_k)$——仅凭速度观测可辨识的量仅为平动速度与瞬时转动中心的复合体，二者分离必须依靠额外约束。

$$\boldsymbol{w}(t_k) \triangleq \boldsymbol{v}_{\mathrm{CoR}}(t_k) - [\boldsymbol{\omega}(t_k)]_\times \boldsymbol{R}(t_k)\,\boldsymbol{C}_b, \tag{18}$$

$$\boldsymbol{K}_i(t_k) \triangleq \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{meas}}(t_k) - [\boldsymbol{\omega}(t_k)]_\times \boldsymbol{R}(t_k)\boldsymbol{P}_i^b = \boldsymbol{w}(t_k) + \boldsymbol{\eta}_i(t_k). \tag{19}$$

结果 2（速度域规范不变性）. 若将$\mathbf{v}_{\mathrm{CoR}}(t_k)$在每个历元视为自由参数（无约束），则对任意候选瞬时转动中心$\widehat{\mathbf{C}}_b$，总存在$\mathbf{v}_{\mathrm{CoR}}(t_k)$使预测速度与测量值完全拟合，即适应度函数与$\widehat{\mathbf{C}}_b$无关，瞬时转动中心不可辨识。

推论 2.1（速度域规范变换）. 与位置域完全对偶，速度域存在规范变换（式(20)），代入式(18)：$\mathbf{w}' = \mathbf{w}$，即所有 INS 的预测速度保持不变。瞬时转动中心的任意偏移可被平动速度的旋转补偿精确吸收。

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{CoR}}{}' = \boldsymbol{v}_{\mathrm{CoR}} + [\boldsymbol{\omega}]_\times \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{\Delta}, \qquad \boldsymbol{C}_b{}' = \boldsymbol{C}_b - \boldsymbol{\Delta}, \qquad \forall\, \boldsymbol{\Delta} \in \mathbb{R}^3. \tag{20}$$

该结果由数值实验定量验证（图 2）。与位置域完全对偶地，破缺机制是对平动速度施加窗口内低阶多项式约束（不含常数项），基准历元处绝对速度由各 INS 均值合成、不参与参数化：

$$\Delta\boldsymbol{v}(\Delta t_k) \triangleq \boldsymbol{v}_{\mathrm{CoR}}(t_k) - \boldsymbol{v}_{\mathrm{CoR}}\big(t_{k_0}\big) = \textstyle\sum_{j=1}^{p} \boldsymbol{a}_j\, \Delta t_k^j, \tag{21}$$

$$\widehat{\boldsymbol{w}}\big(t_{k_0}\big) = \bar{\boldsymbol{v}}_{k_0}^{\mathrm{meas}} - \big[\boldsymbol{\omega}\big(t_{k_0}\big)\big]_\times \boldsymbol{R}\big(t_{k_0}\big)\bar{\boldsymbol{P}}^b, \tag{22}$$

$$\Delta\boldsymbol{K}_i(\Delta t_k) \triangleq \boldsymbol{K}_i(t_k) - \widehat{\boldsymbol{w}}\big(t_{k_0}\big)$$

$$= \textstyle\sum_{j=1}^{p} \boldsymbol{a}_j\, \Delta t_k^j - \left([\boldsymbol{\omega}(t_k)]_\times \boldsymbol{R}(t_k) - \big[\boldsymbol{\omega}\big(t_{k_0}\big)\big]_\times \boldsymbol{R}\big(t_{k_0}\big)\right)\boldsymbol{C}_b + \tilde{\boldsymbol{\eta}}_i(t_k). \tag{23}$$

式(23)中瞬时转动中心的系数为两历元旋转算子之差：仅当窗口内姿态或角速度变化时该系数非零，旋转激励同样是速度域瞬时转动中心可辨识性的物理来源。取 p=2，未知参数向量 $\mathbf{x} = [\mathbf{C}_b;\ \mathbf{a}_1;\ \mathbf{a}_2] \in \mathbb{R}^9$，按 INS 序号与历元堆叠得线性系统：

$$\boldsymbol{x} = \left[\boldsymbol{C}_b^T,\ \boldsymbol{a}_1^T,\ \boldsymbol{a}_2^T\right]^T \in \mathbb{R}^9, \tag{24}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{\Omega}_{k_0}\boldsymbol{R}_{k_0} - \boldsymbol{\Omega}_k\boldsymbol{R}_k & \Delta t_k \boldsymbol{I}_3 & \Delta t_k^2 \boldsymbol{I}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3\breve{M}N_w \times 9}} \boldsymbol{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ \Delta\boldsymbol{K}_i(\Delta t_k) \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\breve{\boldsymbol{b}}}, \tag{25}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}. \tag{26}$$

实际计算以 QR 分解实现。噪声经设计矩阵的传播协方差为

$$Cov(\hat{\boldsymbol{x}}) = \sigma_v^2 (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}, \tag{27}$$

其前 3×3 对角块即瞬时转动中心理论标准差，用于第 3.2 节的误差分解。角速度首选基准 INS 陀螺直接输出，或由姿态矩阵中心差分辅以 Savitzky–Golay 平滑获得，均不依赖 GNSS。

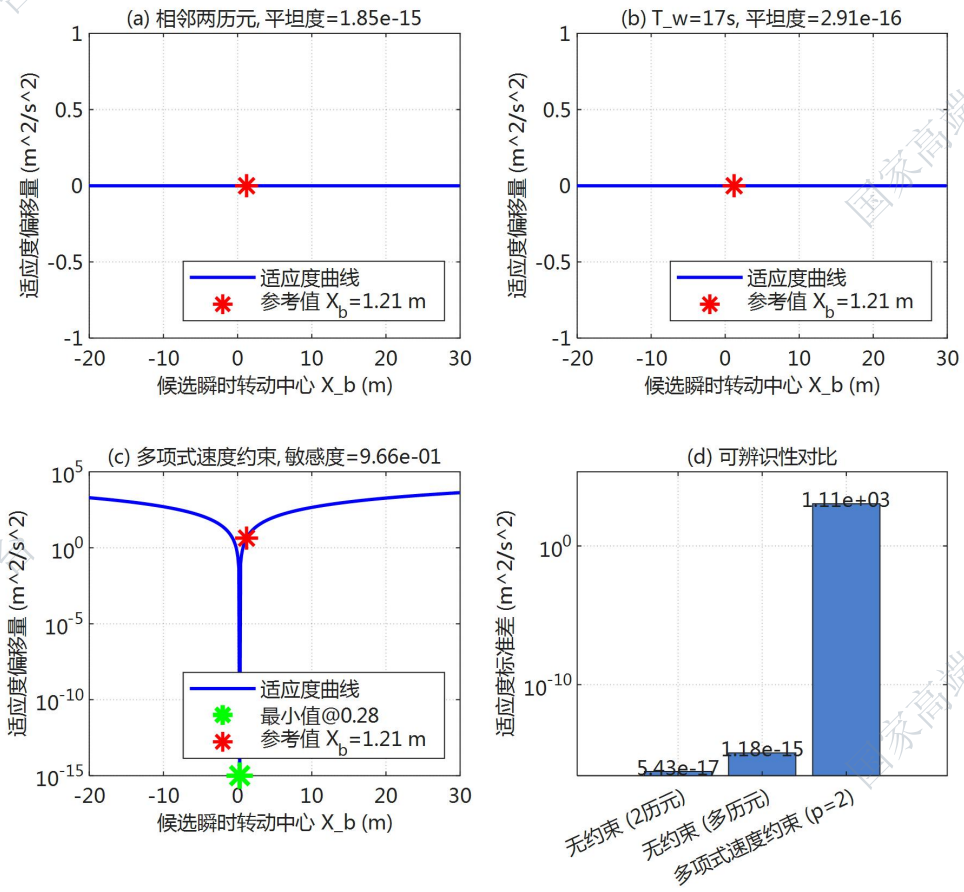


图 2 速度域规范不变性严格论证（与图 1 对偶）：无约束适应度完全平坦，加入多项式速度约束后出现唯一最小值。

2.5 可反演性陈述与运动激励分配

本节给出可反演性的核心陈述。

引理 2.1（Kabsch 分解的唯一性）. 给定四副非共面天线的船体坐标$\{\mathbf{P}_i^b\}_{i=1}^4$和带噪 ENU 测量$\{\mathbf{X}_i(t)\}_{i=1}^4$，Kabsch 算法产生唯一的最优旋转矩阵$\widehat{\mathbf{R}}(t) \in \mathrm{SO}(3)$。当观测噪声$\sigma \to 0$时，该估计几乎必然收敛于真实旋转：

$$\lim_{\sigma \to 0} Pr[\, \| \widehat{\boldsymbol{R}}(t) - \boldsymbol{R}^{\mathrm{true}}(t) \|_F > \epsilon] = 0, \quad \forall \epsilon > 0. \tag{28}$$

引理 2.2（非共面天线基线的可观测性）. 考虑基线矩阵$\mathbf{P}_{\mathrm{base}} = \left[\mathbf{P}_2^b - \mathbf{P}_1^b,\ \mathbf{P}_3^b - \mathbf{P}_1^b,\ \mathbf{P}_4^b - \mathbf{P}_1^b\right] \in \mathbb{R}^{3\times 3}$。若天线布局满足 $\mathrm{rank}(\mathbf{P}_{\mathrm{base}}) = 3$（非共面），则 Kabsch SVD 从基线观测中唯一确定姿态矩阵$\mathbf{R}(t)$。反之，若 $\mathrm{rank}(\mathbf{P}_{\mathrm{base}}) \le 2$（共面），则$\mathbf{H}$的第三奇异值为$\sigma_3 = 0$，绕基线平面法向的旋转分量不可唯一确定。

引理 2.3（多项式约束下适应度函数的依赖性）. $\mathbf{C}_b$ 在$p \ge 1$且窗口内姿态变化充分的条件下，适应度函数$\mathcal{F}_c(\mathbf{x})$在$\mathbf{C}_b$方向上具有唯一全局极小值。

定理 2.1（多项式约束下瞬时转动中心反演的线性可解性）. 在以下条件下：

（a）观测噪声零均值有限方差：$\mathbb{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_i] = \mathbf{0}$，$\mathbb{E}[\|\boldsymbol{\varepsilon}_i\|^2] = \sigma^2 < \infty$；

（b）天线布局满足非共面条件：$\mathrm{rank}(\mathbf{P}_{\mathrm{base}}) = 3$；

（c）多项式阶数 $p \ge 1$，窗口长度 $T_w > 0$；

（d）窗口内姿态变化充分（非恒定姿态）。

线性最小二乘估计的瞬时转动中心 $\widehat{\mathbf{C}}_b$ 满足均方误差界：

$$\boxed{\mathbb{E}\ \left[\|\widehat{\boldsymbol{C}}_b(t_e)-\boldsymbol{C}_b(t_e)\|^2\right]\ =\ O\ \left(\frac{\sigma^2}{N_w\cdot M}\right)\ +\ O\ \left(T_w^{2(p+1)}\right)}. \tag{29}$$

其中 N_w 为窗口内历元数，M=4 为天线数；第一项为多历元平均的降噪项，第二项为多项式近似偏差。定理 2.1 揭示偏差—方差权衡：噪声方差随窗口增大单调递减、截断偏差单调递增，最优窗口 T_w 为两项之和的极小点：

$$\frac{\partial}{\partial T_w}\left[O\ \left(\frac{\sigma^2}{N_w}\right)+O\ \left(T_w^{2(p+1)}\right)\right]_{T_w=T_w^*}=0. \tag{30}$$

两项的单调性保证了最优窗口的必然存在性，其精确值依赖噪声水平、多项式阶数与轨迹光滑性，是框架的内禀属性；该数学结构在速度域完全保留（设计矩阵仅瞬时转动中心系数块不同），两域仿真最优窗口分别为 13 s 与 17 s（第 3 章）。

推论 2.2（函数形式独立性）. 定理 2.1 的误差界适用于姿态角、平动位移和瞬时转动中心轨迹的所有连续函数形式，仅需满足$\mathbf{R}(t)\in \mathrm{SO}(3)$、天线非共面布局以及$p\geq 1$。第 3.1 节仿真轨迹中的具体简谐形式不是必要条件；本算法对任意连续参数化均有效。

综上，证明链表明线性最小二乘框架在数学上严谨：引理 2.1 保证姿态估计唯一性，引理 2.2 确立非共面布局必要性，结果 1 证明多项式约束破缺规范不变性，定理 2.1 给出显式误差界，推论 2.2 确认适用于所有连续运动形式。

结果 3（运动激励分配）. 绕某轴的旋转对瞬时转动中心沿该轴方向的位置完全失明：$C_{b,X}$仅受纵摇与艏摇激励，$C_{b,Y}$受横摇与艏摇激励，$C_{b,Z}$受横摇与纵摇双重激励；故瞬时转动中心分量可辨识性纵轴（X）最弱、横轴（Y）居中、垂轴（Z）最优。

两域的瞬时转动中心系数块均为旋转算子的差分，其列激励结构相同，两域反演均呈现稳定的分量精度梯度：纵轴（X）最弱、横轴（Y）居中、垂轴（Z）最优。该梯度在第 3 章的仿真与第 4 章的实测中均被独立复现，是运动激励主导的固有特性。

3 双系统仿真验证与运动激励实验

3.1 仿真设置

仿真生成 300 s（5 min）完整船舶轨迹，采样频率 20 Hz，共 6001 个历元。各分量均方根误差定义为

$$\mathrm{RMS}_\alpha=\sqrt{\frac{1}{N_{\mathrm{eval}}}\sum_{m=1}^{N_{\mathrm{eval}}}\left[\widehat{C}_{b,\alpha}(t_m)-C_{b,\alpha}^{\mathrm{true}}(t_m)\right]^2},\quad \alpha\in\{X,Y,Z\} \tag{31}$$

（评估间隔 5 s，单位 m）。可复现性声明：全部仿真结果由开源 MATLAB 程序生成（固定随机种子 rng=42，激励实验逐配置固定种子 [42,43,44,45,46]），参数完整公开，读者可据此完整复现全部数值结果。

3.2 双域精度汇总与讨论

固定 p=2，位置域在 {1,5,9,13,17,21} s、速度域在 {5,9,13,17,21,25} s 窗口上分别运行线性 LSQ 求解。双域最优窗口分别为 13 s 与 17 s，表 1 汇总双域链路的特性与精度，图 3 给出双域 RMS 统计：

表 1 位置域与速度域反演链路特性与精度对比（最优窗口）

项目	位置域（多天线 GNSS 方案）	速度域（多 INS 方案）
观测量	天线 ENU 位置	INS 三向速度
姿态/角速度来源	Kabsch SVD（GNSS 基线）	基准 INS（陀螺）
观测噪声本底	cm 级（Gauss–Markov）	0.02 m/s 级（各向异性）
最优窗口T_w^*	13 s	17 s
均值 RMS（布局 A）	0.91 m	0.544 m
均值 RMS（布局 B）	0.92 m	0.547 m
误差主导项	噪声传播+截断偏差	截断偏差+ INS 零偏
长期稳定性	无累积误差（绝对基准）	零偏致缓变漂移
外部依赖	RTK 链路（远海或中断）	完全自主

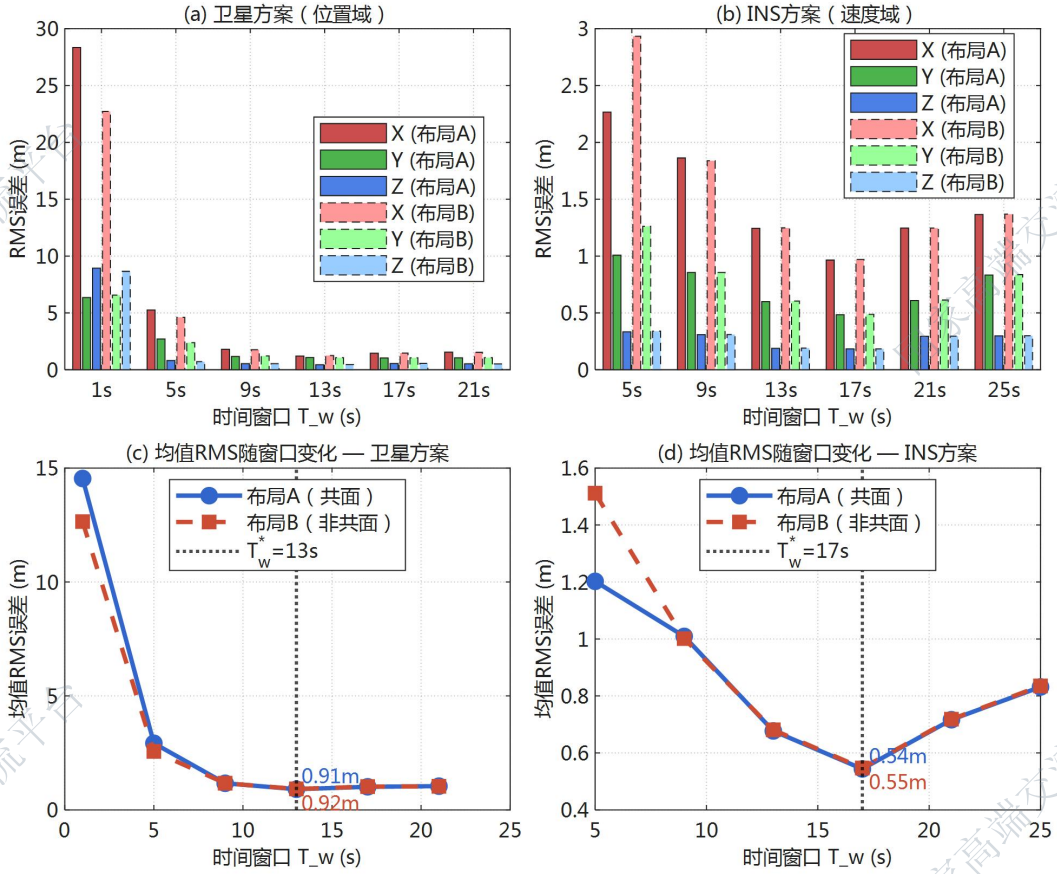


图 3 双域 RMS 统计：两方案在布局 A/B 与各候选窗口下的分量分组柱状图，附均值 RMS 曲线并标注最优窗口。

最优窗口下速度域均值 RMS（约 0.54 m）显著优于位置域（约 0.91 m），约为后者六成，分量精度梯度一致（X 最弱、Z 最优）。首要来源是速度噪声传播远小于位置噪声：INS 速度白噪声经窗口平均与最小二乘压缩后传播至瞬时转动中心仅约 0.01 m；GNSS 位置噪声属时间相关 Gauss–Markov 过程，有效独立样本缩减，经差分模型与设计矩阵求逆后显著放大；次要因素为速度域杆臂对旋转信号的放大效应与 INS 输出短时平滑性。误差分解表明，速度域反演误差几乎完全由多项式截断偏差与 INS 零偏所致的系统项主导（零偏所致瞬时转动中心均值偏差 $[-0.024, +0.014, -0.013]$ m），这为第 5 章以 GNSS 校核 INS 零偏的融合策略提供定量依据。但该优势仅为短窗口瞬时精度优势：速度域输出依

赖基准姿态与角速度，误差随时间累积且零偏引起缓变漂移，GNSS 位置域提供无累积误差的绝对基准，远海 RTK 中断时须由 INS 保持连续输出——两方案是“短期高精度（INS）”与“长期绝对基准（GNSS）”的互补关系。两布局在最优窗口下精度几乎一致（差异约 1%），但短窗口下非共面布局 B 优势明显（均值 RMS 2.57 m 对 2.92 m），工程应用应优先采用非共面四天线配置。计算效率上，单次 QR 分解每个评估点耗时约 0.01 s，完全满足实时需求。

3.3 运动激励实验

本节通过五档海况主实验与四组单自由度扰动实验，对结果 3（运动激励分配）进行定量验证。回顾第 2.5 节的激励分配关系：各分量可辨识性取决于对其“可见”的旋转自由度，激励幅值越大可辨识性越强，过低则率先失效。提出四个待验证假设：H1（激励—响应非单调）——低海况噪声主导、中等海况最优、高海况截断偏差主导；H2（分量梯度随海况移动）——梯度压平但 X≫Y≫Z 排序保持；H3（最优窗口随海况迁移）——激励越强最优窗口越短；H4（单自由度传递严格遵循激励预期）——横摇不改善 Cb,X，纵摇可改善 Cb,X，艏摇仅轻度改善。

构造五档海况（S1 平静/S2 轻浪/S3 中浪（基准）/S4 大浪/S5 巨浪，自定义激励幅值档位），频率固定、仅扫描幅值；机理实验每次仅一个转动自由度强激励、其余降至 S1 水平（E1 横摇/E2 纵摇/E3 艏摇/E4 全弱），另复算恒定幅值 S3 基准组交叉锚定。仅采用布局 B，窗口固定于基准最优值，每档 5 个固定噪声种子，X 分量 RMS 超 3 m（甲板作业容差上限）判为失效。五档海况下两方案瞬时转动中心 RMS 见表 2（双域两表合并），激励—响应曲线见图 4。

表 2 五档海况激励—响应主实验：双域瞬时转动中心 RMS 的 X 分量与均值（布局 B，位置域 $T_w = 13\,s$、速度域 $T_w = 17\,s$，均值±1σ（$n = 5$），单位 m）

海况	卫星方案（位置域）		INS 方案（速度域）	
	X RMS	均值 RMS	X RMS	均值 RMS
S1 平静	10.32 ± 1.18	7.25	1.617 ± 0.023	0.930
S2 轻浪	3.33 ± 0.30	2.51	1.192 ± 0.012	0.703
S3 中浪（基准）	1.31 ± 0.07	0.96	0.984 ± 0.018	0.563
S4 大浪	1.45 ± 0.06	1.06	1.450 ± 0.007	0.820
S5 巨浪	1.72 ± 0.04	1.18	1.884 ± 0.006	1.023

激励—响应形态上（H1）：两方案均值 RMS 均呈清晰的非单调 U 形，谷底同在 S3（INS 0.563 m、卫星 0.96 m），S1 弱激励噪声方差主导、S4/S5 强激励截断偏差主导而回升，H1 成立。分量梯度上（H2）：梯度随激励增强显著压平（卫星方案 X/Y 比值 1.44→1.28），但 X≫Y≫Z 排序全海况保持——“X 最弱”不可逆转，H2 部分成立。所有海况下 INS 方案 RMS 均低于卫星方案，比值由 S1 的 13% 升至 S5 的 87%（强激励下陀螺误差积分传播的姿态失准加剧，而卫星方案对摆幅不敏感）。失效条件：卫星方案 X 分量在 S1（10.32 m）与 S2（3.33 m）失效，S3 起达标；INS 方案全海况达标（最差 S5 的 1.884 m）

——平静至轻浪海况下纯卫星方案纵向瞬时转动中心不可用，INS 方案全海况可用。

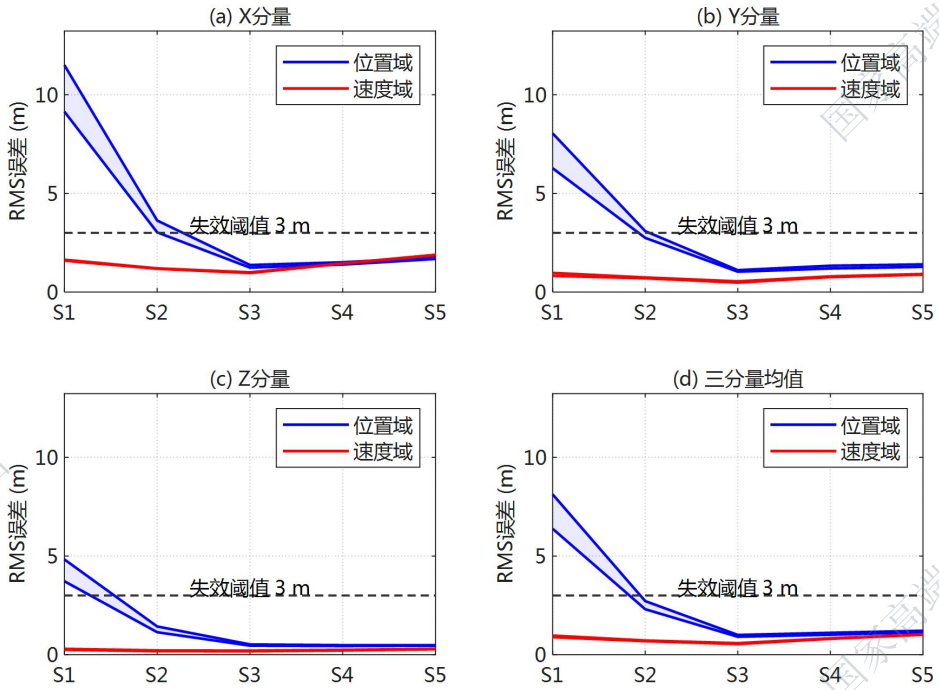


图 4 五档海况激励—响应曲线（布局 B，$n = 5$）：X、Y、Z 三分量及其均值，含 3 m 失效阈值。

机理实验逐项验证了激励预期的传递关系（图 5，H4 成立）：横摇增强十倍对 Cb,X 无任何改善（E1，与 E4 全弱组相当），而 Cb,Y、Cb,Z 分别改善 87%、86%——绕纵轴旋转对纵向位置失明得到直接定量验证；纵摇是改善 X 分量的唯一强激励源（E2，卫星方案 Cb,X 降幅 91%）；艏摇仅轻度改善 Cb,X、Cb,Y 且量级受幅值限制（E3）；全弱激励下三分量均退化、X 率先失效（E4，双方案双双越过失效线）——INS 方案对激励不足亦非免疫。全部预测关系在两域同时成立（表 3），与观测量类型无关，再次确认其运动学本质；该规律在实测双系统差值 RMS 中同样复现（第 4.2 节）。

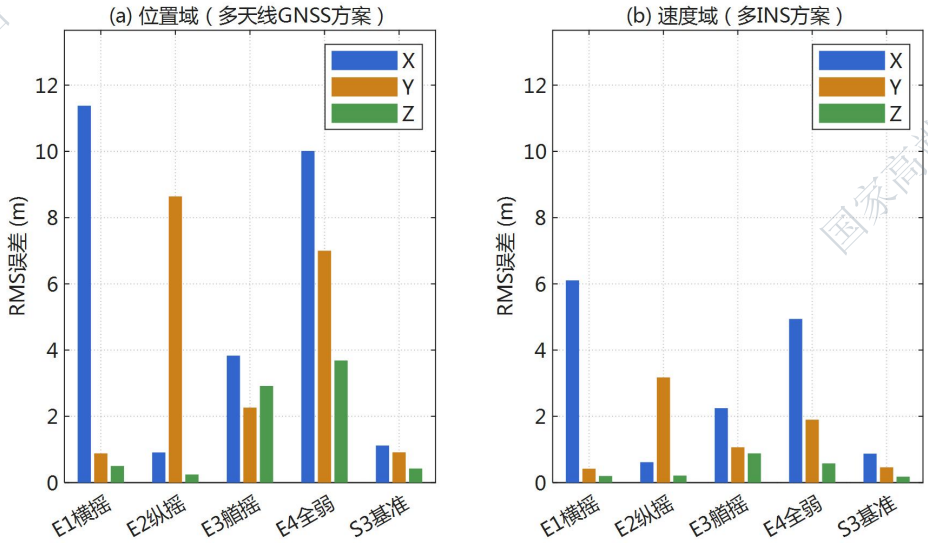


图 5 单自由度激励传递验证（布局 B，$n = 5$）：位置域与速度域的 X/Y/Z 分量 RMS 分组柱状图。

表 3 激励预期关系验证汇总（E4 全弱组为对照基准；表中数值为 RMS 相对 E4 组的变化率 $\mathrm{RMS}/\mathrm{RMS}_{\mathrm{E4}} - 1$，负值为改善、正值为退化）

待验证关系	理论预期（第 2.5 节）	位置域结果	速度域结果	结论
$C_{b,X}$ ← 纵摇+艏摇	E2 的 $C_{b,X}$ 显著改善；E1 的$C_{b,X}$无改善	E2：−91%；E1：+14%（无改善）	E2：−87%；E1：+24%（无改善）	成立
$C_{b,Y}$ ← 横摇+艏摇	E1 的 $C_{b,Y}$ 显著改善；E2 的$C_{b,Y}$无改善	E1：−87%；E2：+23%（无改善）	E1：−78%；E2：+67%（无改善）	成立
$C_{b,Z}$ ← 横摇+纵摇	E1、E2 的$C_{b,Z}$均改善；E3 的$C_{b,Z}$无改善	E1：−86%；E2：−93%；E3：−21%（弱）	E1：−66%；E2：−63%；E3：+53%（无改善）	成立
艏摇轻度改善 $C_{b,X}$、$C_{b,Y}$	E3 的$C_{b,X}$、$C_{b,Y}$轻度改善；量级受幅值限制	$C_{b,X}$：−62%；$C_{b,Y}$：−68%	$C_{b,X}$：−54%；$C_{b,Y}$：−44%	成立
全弱激励退化	E4 三分量均退化；X 最差且率先失效	10.01/7.00/3.69 m；X 失效	4.940/1.901/0.578 m；X 失效	成立
双域一致性	上述关系在两域同时成立	位置域与速度域结论逐项一致		成立

工程应用上：以均值 RMS 低于 3 m 且 X 分量不失效为标准，卫星方案要求纵摇稳态摆幅达 S3 量级（约 6°），S2 及以下海况其纵向瞬时转动中心不可用；INS 方案 S1 平静海况仍满足要求，其可用下限同样由激励水平决定。机动建议：纵摇激励是改善 X 分量的最高效手段；海况低于 S2 且需保障纵向精度时，可通过周期性艏向微调（±4° 级正弦机动）注入艏摇激励，或以加减速/纵倾配载诱导纵摇响应。任务规划阶段可依激励预期关系预判分量精度排序（X 由

纵摇与艏摇决定、Y 由横摇与艏摇决定、Z 由横摇与纵摇决定）。本节建立了“海况参数（船舶运动激励）→瞬时转动中心辨识精度”的可预测、可干预、模式无关的定量桥梁；H3（最优窗口随海况迁移）因本节窗口固定的控制变量设计未获直接数据支撑，S4/S5 的精度回升与饱和形态仅提供方向性间接证据，窗口—海况联合寻优留待后续工作；主要局限为频率全部固定、平动幅值按比例缩放属近似处理，精确关系需结合船舶水动力 RAO 进一步标定。

4 海上实测验证

在本研究完成前，研究团队已完成一次海上实船测绘，将多天线 GNSS 方案装置部署于实船，对理论分析与仿真结论进行实境检验。本节遵循定性原则：实船环境无法获得瞬时转动中心独立真值，以双系统互一致性作为替代度量，仅以处理流程与评价方法的完整说明保证可复现性；图 6 给出的双系统差异为相对量，瞬时转动中心真值在差值中抵消，不含绝对位置信息。

4.1 测绘概况与试验方案

测绘期间，在船体甲板平面不同位置安装三副 GNSS 天线（共面布局），岸上固定点架设基准站作为 RTK 坐标原点；船舶姿态由船载主机 INS 提供（以短时相对变化精度作趋势基准）。观测涵盖连续数小时自然海况下的六自由度运动，数据以真实采样率记录，包含传感器不同步、多路径、标定残差等实际因素。实测数据处理采用两种模式共五种方案，统一执行时间插值对齐、滑动窗口多项式约束、线性最小二乘反演：模式一（GNSS 与 INS 融合）下方案 1–3 为单天线方案、方案 4 联合三副天线与主机 INS 加权融合；模式二（纯 GNSS）下方案 5 姿态由 Kabsch 独立解算。反演后对瞬时转动中心序列施加一步 Savitzky–Golay 平滑（纯后处理）；融合权重取窗口内姿态旋转路径长度，平滑窗口取反演窗口三至五倍，五种方案统一参数以保证公平。

4.2 实测结果与双系统互一致性

五种方案均成功输出连续瞬时转动中心时间序列，全程无发散。单天线方案（1–3）存在与安装位置相关的中心值偏移但趋势一致；多天线加权融合方案（方案 4）表现最佳——双重权重机制自动削弱受局部环境影响较大的天线，其匹配程度、互一致性与残差稳定性均最优，应作为工程首选；纯多天线方案（方案 5）因共面安装存在 Kabsch 姿态歧义（与引理 2.2 的预言一致），输出明显失配，不具备工程可用性——证实纯 GNSS 模式必须采用非共面布局。各方案瞬时转动中心估计均呈现与仿真一致的分量排序（X 最弱、Y 居中、Z 最优）。

缺乏真值条件下，本节以双系统互一致性为替代度量。图 6 展示卫星方案 4 与 INS 方案瞬时转动中心估计差值的滑动窗口 RMS（窗口 60 s；真值在求差时抵消）。需要说明的是，方案 4 的姿态信息部分来自船载主机 INS，两套方案之间存在一定的共源误差，图中所示差值会小于两系统实际的不一致程度。全程差值 RMS 为 X 向 47.2 m、Y 向 18.8 m、Z 向 12.7 m，X 向主导，与结果 3 的激励分配预言一致；低激励时段峰值 105.6 m，高激励时段谷值降至 7.0 m。图 6 黄底标注的显著生摇时段（“生摇”指通过减摇鳍等装置主动激励船舶产生摇荡的试验工况，此处为强横摇激励工况，共 3 段约 32 min）内，合并差值 RMS 为 X 向 54.6 m、Y 向 6.5 m、Z 向 2.0 m——横摇主激励下 Z 向两方案高度吻合、Y 向达米级一致。差值绝对量级显著大于仿真预期，源于实船未建模因素

叠加，故仅作相对比较指标；工程上有意义的表征为显著生摇时段内 Z 向 2.0 m、Y 向 6.5 m 的合并差值。

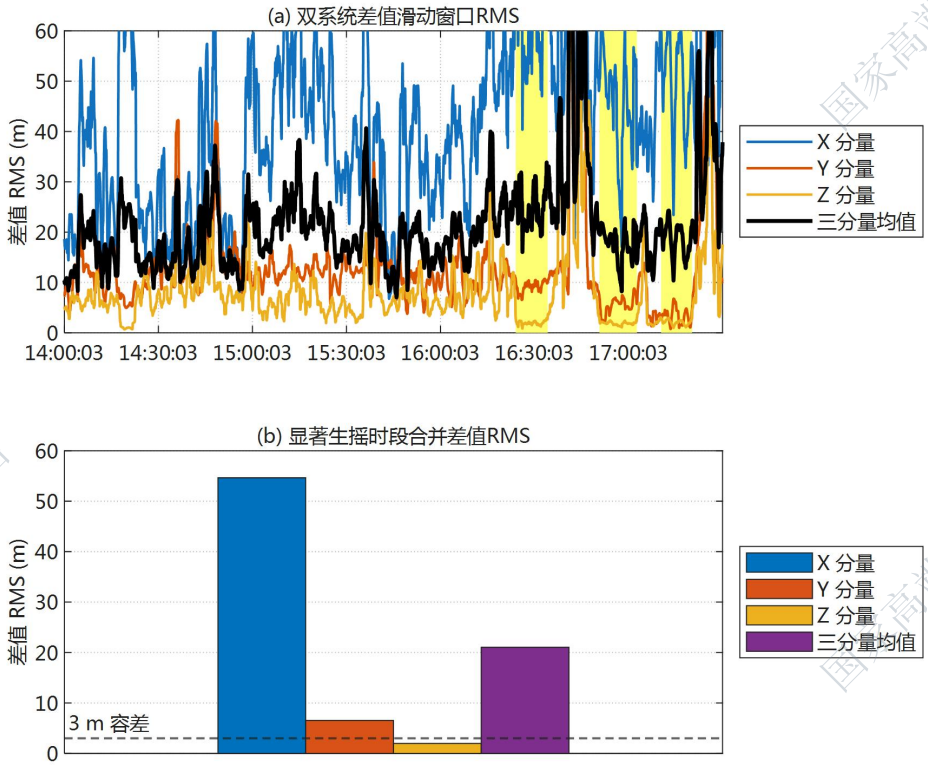


图 6 双系统瞬时转动中心估计差异的滑动窗口 RMS（海上实测：卫星方案 4 对 INS 方案，窗口 60 s）。

4.3 激励对比工况与意外发现

尤为值得注意的是激励对比工况给出的意外发现：显著生摇时段（横摇主激励）的 X 向差值 RMS（54.6 m）反而高于全程均值（47.2 m）——横摇强工况较全弱工况，X 向差值呈增大趋势。这与图 5 中 E1 组（仅横摇强）的激励传递关系完全吻合：横摇激励无法改善 Cb,X（绕纵轴的旋转对纵向位置完全失明），甚至因横摇主导增强了平动吸收而略有恶化。与此同时，生摇时段内两套独立系统的 Y 向、Z 向反演结果惊人地吻合（差值低至 Y 向 6.5 m、Z 向 2.0 m），从实船角度独立复现了运动激励分配理论。

4.4 局限性与实测结论

本次实测存在以下局限：无法获得瞬时转动中心独立真值，精度评价基于互一致性等替代度量；姿态基准仅用主机 INS 相对变化；三副天线共面配置，非共面实船增益待后续验证；结论基于单次测绘的特定船舶与海况，外推应保持谨慎；多天线 GNSS 安装位置下方未布设对应 INS 节点，速度域方案的独立实船验证有待后续试验（本次利用实船既有非共面 INS 节点反演，两种方案瞬时转动中心一致性非常高，尤其减摇鳍主动生摇工况下 Y、Z 向惊人吻合）；差值 RMS 绝对量级受未建模因素影响，仅作相对比较。上述局限不改变本节结论的

相对比较性质。综合本次海上实船测绘，真实海洋环境复现并巩固了仿真结论：瞬时转动中心各分量辨识精度由运动激励主导、纵轴为固有薄弱环节；多天线 GNSS 与 INS 加权融合是最稳健的工程方案；纯 GNSS 模式必须采用非共面天线布局。这为甲板相对导航基准的实船应用提供了直接依据，后续将补充非共面实船配置、扩展海况覆盖，并推进窗口自适应与实时嵌入式部署。

5 双系统融合策略

位置域（多天线 GNSS）与速度域（多 INS）方案基于完全独立的物理观测量，误差特性互补：GNSS 定位厘米级、无累积误差，但远海 RTK 可能中断；INS 短期精度高、全天候自主，但零偏引起缓变漂移。两链路输出汇入融合模块，策略为三阶段：近岸校核（以卫星方案估计 INS 等效速度零偏并反馈扣除）、远海自主（INS 以校准零偏独立运行保持连续）、再校准（返回近岸时更新零偏估计）。该策略直接回应零偏所致缓变偏差（仿真中仅 [-0.024, +0.014, -0.013]m，见第 3.2 节）。深度融合（以瞬时转动中心与 INS 零偏为状态的卡尔曼滤波）可作为后续工作方向。

6 结论

瞬时转动中心反演的本质困难是规范不变性：仅凭船体测点的位置或速度观测，平动量与瞬时转动中心在无约束条件下不可分离。本文以多项式约束平动模型破缺该不变性，将反演转化为普通线性最小二乘并获得闭式全局最优解；框架对多天线 GNSS（位置域）与多 INS（速度域）观测严格对偶成立。六自由度仿真表明，INS 方案瞬时转动中心均方根误差为 0.54 m，约为卫星方案的六成，满足甲板作业精度要求；两域均稳定复现纵轴最弱、垂轴最优的分量精度梯度，与运动激励分配理论一致。五档海况激励实验揭示辨识精度随激励增强呈非单调变化，单自由度机理实验确认横摇不能改善 X 向而纵摇可以改善 X 向的传递关系。海上实船测绘在真实海况中复现了上述梯度与布局结论，两方案反演瞬时转动中心在 Y、Z 向上惊人地吻合。

本研究方法无需船舶动力学模型，可适配多种船体测点，仅需固定岸基参考站提供坐标基准；近岸校核 INS 零偏、远海自主运行的融合策略保证了瞬时转动中心估计的连续可用性。局限性已在第 4.4 节等处分散说明。后续工作将聚焦窗口—海况自适应调整、非共面实船配置与实时嵌入式部署。

参考文献

[1] FOSSEN T I. Handbook of marine craft hydrodynamics and motion control[M]. Chichester: John Wiley & Sons, 2011.

[2] TEUNISSEN P J G. Integer least-squares theory for the GNSS compass[J]. Journal of Geodesy, 2010, 84(7): 433-447.

[3] GIORGI G, TEUNISSEN P J G, VERHAGEN S, et al. Instantaneous ambiguity resolution in global-navigation-satellite-system-based attitude determination applications: a multivariate constrained approach[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2012, 35(1): 51-67.

[4] HENKEL P. Tightly coupled precise point positioning and attitude determination[J]. IEEE

Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2015, 51(4): 3182-3197.
[5] TEUNISSEN P J G, GIORGI G, BUIST P J. Testing of a new single-frequency GNSS carrier phase attitude determination method: land, ship and aircraft experiments[J]. GPS Solutions, 2011, 15(1): 15-28.
[6] ZOU T, ZENG W, YANG W, et al. An adaptive robust cubature Kalman filter based on Sage-Husa estimator for improving ship heave measurement accuracy[J]. IEEE Sensors Journal, 2023, 23(9): 10089-10099.
[7] TITTERTON D H, WESTON J L. Strapdown inertial navigation technology[M]. 2nd ed. London: Institution of Engineering and Technology, 2004.
[8] GROVES P D. Principles of GNSS, inertial, and multisensor integrated navigation systems[M]. 2nd ed. Boston: Artech House, 2013.
[9] TEUNISSEN P J G, MONTENBRUCK O, ed. Springer handbook of global navigation satellite systems[M]. Cham: Springer International Publishing, 2017.
[10] KABSCH W. A solution for the best rotation to relate two sets of vectors[J]. Acta Crystallographica Section A, 1976, 32(5): 922-923.
[11] BESL P J, MCKAY N D. A method for registration of 3-D shapes[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1992, 14(2): 239-256.
[12] GARCÍA-DE-VILLA S, JIMÉNEZ-MARTÍN A, GARCÍA-DOMÍNGUEZ J J. Novel IMU-based adaptive estimator of the center of rotation of joints for movement analysis[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2021, 70: 1-11.
[13] WANG Q, YAN P, JIANG J, et al. Online estimation of the mounting angle and the lever arm for a low-cost embedded integrated navigation module[J]. Remote Sensing, 2024, 16(16): 3064.
[14] YODER J E, HUMPHREYS T E. Low-cost inertial aiding for deep-urban tightly coupled multi-antenna precise GNSS[J]. NAVIGATION: Journal of the Institute of Navigation, 2023, 70(1): navi.561.
[15] IXBLUE. PHINS subsea inertial navigation system: technical datasheet[Z]. Paris: iXBlue, 2020.
[16] NOVATEL. IMU errors and their effects: application note APN-064[Z]. Calgary: NovAtel Inc., 2014.
[17] IEEE. IEEE Std 952-1997. IEEE standard specification format guide and test procedure for single-axis interferometric fiber optic gyros[S]. New York: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1997.
[18] ANALOG DEVICES. MEMS IMU ADIS16490: tactical grade, six degrees of freedom inertial sensor: data sheet[Z]. Norwood: Analog Devices, Inc., 2018.
[19] BOWRING B R. Transformation from spatial to geographical coordinates[J]. Survey Review, 1976, 23(181): 323-327.

作者简介

郭森鑫，男，1998 年生，助理工程师，研究方向：船舶导航技术、多天线 GNSS 定姿、GNSS/INS 组合导航、船舶运动参数估计，以及导航设备的嵌入式系统部署，E-mail：senxin.guo@qq.com。

黄斌，男，1991 年生，高级工程师，研究方向：聚焦于舰载航空保障系统设计，同时

涉及船舶甲板作业的安全性分析，E-mail：827469891@qq.com。

王明丰，男，1981 年生，研究员，研究方向：包括舰载系统总体设计、甲板作业运动预测，以及舰载机起降过程的动力学仿真与实验验证，E-mail：2812765556@qq.com。

作者贡献声明

郭森鑫：负责研究构思、理论推导、算法设计与仿真验证，并撰写论文初稿。

黄斌：负责海上试验组织与实测数据分析，提供试验资源，并参与论文审阅与修订。

王明丰：负责实验设计与机理分析，提供试验资源，并参与论文审阅与修订。

国家高端交流平台