

(说明: 本版仅在 V1 版的基础上做了如下改动:

1、增加了“表 1、表 2、附录 1”等编号;

2、对部分参考文献的错误做了更正, 但编号没有改变, 不对 V1 版的其它内容构成影响)

从 $5+6x$ 到 $8+6x$: 考拉兹迭代中一类数字的局部收敛定理

郝占柱

(太原钢铁(集团)有限公司职工教育培训中心 太原 030003)

摘要:

[目的] 研究考拉兹迭代中形如 $5+6x$ 的数在复合运算 $T(n)=(3n+1)/2$ 下的局部收敛行为。

[方法] 将迭代过程中出现的所有奇数统一表示为算术级数 $S(x)=a+bx$, 采用归纳法证明系数公式 $a_k=2 \times 3^{(k+1)}-1$ 、 $b_k=2 \times 3^{(k+1)}$, 建立迭代继续条件与初始参数二进制表示的对应关系, 利用二进制表示的有限性完成终止性证明。

[结果] 证明了从任意 $5+6x$ 出发, 经有限次 T 迭代后必然落入偶数数列 $8+6x$, 并给出收敛步数上界 $K+1=L+2$ (L 为初始参数的最高二进制位)。

[局限] 仅研究模 6 余 5 这一类数, 且仅在复合运算 $T=(3n+1)/2$ 下讨论, 不处理偶数后续除以 2 的步骤, 结论是局部的, 不构成对完整考拉兹猜想的证明。

[结论] 为考拉兹猜想中模 6 余 5 数类的迭代行为提供了完整且严格的局部描述。

关键词: 考拉兹猜想; $3n+1$ 问题; 二进制表示; 归纳证明; 局部定理

分类号: 0156.1

From $5+6x$ to $8+6x$: A Local Convergence Theorem in the Collatz Iteration

Hao Zhanzhu

(Staff Education and Training Center, Taiyuan Iron and Steel (Group) Co., Ltd., Taiyuan 030003 China)

Abstract:

[Objective] To study the local convergence behavior of numbers of the form $5+6x$ under the composite operation $T(n)=(3n+1)/2$ in the Collatz iteration.

[Methods] All odd numbers arising in the iteration are uniformly represented as an arithmetic progression $S(x)=a+bx$. The closed-form coefficients $a_k=2 \times 3^{(k+1)}-1$ and $b_k=2 \times 3^{(k+1)}$ are established by induction. A precise correspondence between the iteration continuation condition and the binary representation of the initial parameter is established, and the termination proof is completed using the finiteness of the binary representation.

[Results] It is proved that starting from any number of the form $5+6x$, after finitely many iterations of T , one necessarily reaches an even number belonging to the sequence $8+6x$. An upper

bound on the number of convergence steps is given by $K+1=L+2$, where L is the highest binary bit of the initial parameter.

[Limitations] Only the class of numbers congruent to 5 modulo 6 is studied, and only under the composite operation $T=(3n+1)/2$. The subsequent division-by-2 steps for even numbers are not addressed. The conclusion is local and does not constitute a proof of the full Collatz conjecture.

[Conclusion] A complete and rigorous local description is provided for the iterative behavior of the class of numbers congruent to 5 modulo 6 in the Collatz conjecture.

Keywords: Collatz conjecture; $3n+1$ problem; binary representation; proof by induction; local theorem

1 引言

考拉兹猜想, 又称 $3n+1$ 猜想、冰雹猜想、角谷猜想, 由 Lothar Collatz 于 1937 年提出。

尽管该猜想表述简单, 但经过近一个世纪的研究, 至今仍未得到完整证明。考拉兹猜想的困难在于其迭代过程中奇偶模式的高度复杂性。由于完整证明困难重重, 许多研究者转而研究该猜想的局部性质。这自然地提出一个问题: 能否找到某些特殊的数类, 使我们可以完整地描述其迭代规律? 本文沿着这一思路, 研究形如 $5+6x$ (即除以 6 余 5) 的数。这类数在考拉兹迭代中是有规律可循的: 它们经过一次“乘 3 加 1”后变成偶数, 再除以 2 后, 其结果要么是偶数 (落入另一个已知数类), 要么仍然是奇数 (继续迭代)。我们的目标不是证明所有数都收敛到 1, 而是证明: 从任意 $5+6x$ 出发, 在仅执行“ $T(n)=(3n+1)/2$ ”的复合操作下, 经过有限次 T 运算后, 必然落入偶数列 $8+6x$ (即所有除以 6 余 2 的偶数)。

具体而言, 考拉兹猜想的表述仅涉及最基本的算术运算, 任何具备初等数学知识的读者都能轻松理解, 但其证明却异常困难。近一个世纪以来, 研究者们从多个角度展开探索, 取得了丰硕的阶段成果: 在计算验证方面, 人们已对极其巨大范围内的整数进行了穷尽检验, 均未发现反例; 在解析研究方面, Tao 证明了几乎所有初值的轨道在几乎必然的意义下取得几乎有界的值, 这是迄今为止最强的结果之一; 在结构分析方面, 研究者揭示了迭代序列与二进制表示、模运算之间的深刻联系。这些工作从不同侧面增进了人们对考拉兹迭代的理解, 但完整证明仍遥不可及。

在完整证明难以企及的背景下, 研究特定数类的局部行为具有重要的理论意义。一方面, 局部定理可以为完整猜想提供坚实的证据和直观的启发, 帮助人们理解迭代过程中哪些数类呈现出规律性, 哪些数类表现出复杂性, 从而逐步缩小未知的范围; 另一方面, 局部研究中发展出的方法和工具, 往往可能为最终证明提供关键的思路。

本文结论的完整陈述与严格证明见第 4 节。

本文的主要贡献有:

第一, 建立了一个精确的递推模型。

第二, 证明了系数的显式公式。

第三, 建立了迭代继续条件与二进制表示的对应关系。

第四，给出了完整的终止性证明。

本文的结构如下：第2节综述与本文方法有关的已有工作；第3节介绍了必要的预备知识，包括记号约定和基本递推公式；第4节给出了核心定理及其证明；第5节提供了数值验证的结果；第6节总结全文并讨论了可能的推广方向。

2 相关工作

考拉兹猜想已有大量研究，与本文方法最接近的是 Angermund^[1] 提出的“算术级数上的双算子演算”：他将整数集合编码为算术级数 $S(a, b) = \{ai + b\}$ ，定义两个下标算子 $T1: S(a, b) \rightarrow S(2a, b)$ 与 $T2: S(a, b) \rightarrow S(2a, b+a)$ ，可在一步内把任意级数拆分为偶子列与奇子列，并进一步证明：对任意给定的奇偶字 (parity word)，所有实现该奇偶模式的初值构成显式算术级数；沿纯奇步路径迭代时级数系数保持仿射不变式，据此证明不存在能无限次执行奇步的有限初值。本文与上述框架一脉相承：同样以 $S(x) = a + bx$ 表示迭代中出现的奇数列，通过归纳法得到系数的显式公式（引理1），利用“第 k 步走向由初值参数 x 的第 k 个二进制位决定”（引理3）与二进制表示的有限性完成终止性证明（定理1）。与 Angermund 面向全体初值的通用框架相比，本文的侧重点在于对模6余5数类给出完整显式的局部描述：明确 $5+6x$ 类经有限次 T 迭代后必然落入 $8+6x$ 偶数类，精确刻画偶数分支的归属（引理2），并给出以初值最高二进制位 L 表示的步数上界 $K+1$ （推论1）。

此外，Terras^[2] 与 Everett^[3] 已用奇偶向量 (parity vector) 系统研究了初值模 2^k 类与其前 k 步奇偶模式的一一对应，本文引理3是这一思想在 $5 \bmod 6$ 数类上的体现；Crandall^[4] 与 Ren^[9] 等使用约化迭代（奇数时取 $(3m+1)/2$ 或其多次复合）研究考拉兹动力学，本文的 $T(n) = (3n+1)/2$ 即属此类；关于该猜想的全面综述、注释书目与最新进展，可参见 Lagarias^[5,6,7]、Winkler^[8] 与 Tao^[10]；国内也有相关讨论^[11,12]。

与上述工作相比，本文的研究特色在于：不追求对所有整数的统一描述，而是聚焦于模6余5这一特定数类，在复合运算 T 下给出从初值到目标数类的完整收敛性证明。本文的算术级数方法与 Angermund 的双算子演算在精神上相通，但更具体地针对模6余5数类给出了显式的系数公式和精确的步数上界；本文的二进制分析继承了 Terras 和 Everett 的奇偶向量思想，但将其落实到具体的递推系数上，实现了终止性的严格证明。这种“具体数类 + 显式公式 + 严格证明”的研究思路，是对现有考拉兹研究文献的有益补充。

3 预备知识

3.1 记号约定

本文中， x 始终表示非负整数 ($x=0, 1, 2, \dots$)。

定义两个基本数列：

$$5, 11, 17, 23, 29, 35, \dots, \text{通项 } 5+6x \quad (1)$$

$$8, 14, 20, 26, 32, 38, \dots, \text{通项 } 8+6x \quad (2)$$

定义复合运算： $T(n) = (3n+1)/2$ 。

(注意：本文仅在 n 为奇数时应用 T 运算，即将“乘 3 加 1”与“除以 2”合并为一次复合操作；当 T 的结果为偶数时，即视为落入目标数类并停止，不再继续除以 2。这与标准考拉兹迭代不同——本文不处理偶数后续的除以 2 步骤，也不以最终到达 1 为目标。)

3.2 基本观察

对数列 (1) 的任意一项 $5+6x$ 执行 T 运算：

$$T(5+6x) = (3(5+6x)+1)/2 = 8+9x$$

得数列：8, 17, 26, 35, 44, 53, ……，通项 $8+9x$ (3)

拆分数列 (3)，得一个偶数列 (4) 和一个奇数列 (5)：

$$8, 26, 44, 62, 80, 98, \dots, \text{通项 } 8+18x \quad (4)$$

$$17, 35, 53, 71, 89, 107, \dots, \text{通项 } 17+18x \quad (5)$$

注意到：偶数列 (4) 的每一项都能在数列 (2) 里找到。

这说明从数列 (1) 出发，经过一次 T 运算后，所得新数列的各项，要么变成偶数直接落入数列 (2)，要么变成奇数进而转化为另一个奇数列 $17+18x$ 。（需要进行 T 运算）

3.3 递推框架

更一般地，设第 k 步 (k 从 0 开始计数，第 0 步即对初始数 $5+6x$ 执行 T 运算) 需要进行 T 运算的奇数列具有形式：

$$S(x) = a + bx$$

其中 a 为奇数， b 为偶数， $x=0, 1, 2, \dots$ 。

对 $S(x)$ 进行 T 运算：

$$T(S(x)) = (3S(x)+1)/2 = (3a+1)/2 + (3b/2)x$$

$$\text{令： } c = (3a+1)/2 \quad d = 3b/2$$

$$\text{则： } T(S(x)) = c + dx$$

(在本文递推中，由于 $b_k = 2 \times 3^{k+1}$ ，故 $d_k = 3b_k/2 = 3^{k+2}$ 为奇数，这个新数列的各项仍是奇偶相间的，需要继续拆分为一个奇数列和一个偶数列，其偶数列必属于数列 (2)——严格证明见引理 2，其奇数列需要进行 T 运算)

以下 $S_k(x)$ 中的 x 表示第 k 步的当前参数；为简化记号，在不致混淆时仍记为 x ，其与初始参数的关系由引理 3 给出。

4 核心定理及其证明

4.1 定理陈述

定理 1 (主要定理)：对于任意非负整数 x ，从 $n=5+6x$ 出发，在迭代 $T(n)=(3n+1)/2$ 下，必然存在某个有限整数 k (依赖于 x)，使得第 k 步 T 运算的结果为偶数，且该偶数属于数列 (2)。换言之，数列 (1) 的每一项经过有限次 T 迭代后，都会落入数列 (2)。

4.2 引理

将 3.3 节的一般形式应用于第 k 步，记 $a=a_k, b=b_k$ ，对应的数列记为

$S_k(x)$ 。

引理 1（系数公式）。对于所有 $k \geq 0$ ，有：

$$a_k = 2 \times 3^{k+1} - 1 \quad b_k = 2 \times 3^{k+1}$$

证明（归纳法）：

基础步： $k=0$ 时，

$$a_0 = 2 \times 3^1 - 1 = 5 \quad b_0 = 2 \times 3^1 = 6$$

成立。

归纳步：假设第 k 步成立，即：

$$S_k(x) = (2 \times 3^{k+1} - 1) + 2 \times 3^{k+1}x$$

计算 $T(S_k(x))$ ：

$$\begin{aligned} T(S_k(x)) &= (3S_k(x) + 1) / 2 \\ &= [3(2 \times 3^{k+1} - 1 + 2 \times 3^{k+1}x) + 1] / 2 \\ &= [6 \times 3^{k+1} - 2 + 6 \times 3^{k+1}x] / 2 \\ &= [6 \times 3^{k+1} - 2] / 2 + 3 \times 3^{k+1}x \\ &= 3^{k+2} - 1 + 3^{k+2}x \end{aligned}$$

由于 $3^{k+2} - 1$ 是偶数（奇数减 1 等于偶数），所以：

当 x 为偶数时， $T(S_k(x))$ 为偶数；当 x 为奇数时， $T(S_k(x))$ 为奇数。

当 x 为奇数时，令 $x = 2m + 1$ ：

$$\begin{aligned} T(S_k(2m+1)) &= 3^{k+2} - 1 + 3^{k+2}(2m+1) \\ &= 3^{k+2} - 1 + 2 \times 3^{k+2}m + 3^{k+2} \\ &= 2 \times 3^{k+2} - 1 + 2 \times 3^{k+2}m \end{aligned}$$

因此：

$$S_{k+1}(m) = (2 \times 3^{k+2} - 1) + 2 \times 3^{k+2}m$$

即：

$$a_{k+1} = 2 \times 3^{k+2} - 1 \quad b_{k+1} = 2 \times 3^{k+2}$$

$$\text{所以：} \quad a_k = 2 \times 3^{k+1} - 1 \quad b_k = 2 \times 3^{k+1}$$

归纳完成。证毕。

引理 2（偶数分支的准确刻画与归属）。

对于第 k 步 T 运算（ $k \geq 0$ ），由引理 1 知待 T 运算的奇数为：

$$S_k(x) = 2 \times 3^{k+1} - 1 + 2 \times 3^{k+1}x$$

对其进行一次 T 运算：

$$T(S_k(x)) = 3^{k+2} - 1 + 3^{k+2}x$$

则以下两条结论成立：

- 1.（分支判定） $T(S_k(x))$ 为偶数，当且仅当 x 为偶数。
- 2.（归属判定）若 $T(S_k(x))$ 为偶数，则它一定属于数列 $8+6t$ （ t 为非负整数）。

证明:

结论 1:

因为 3^{k+2} 是奇数, 所以常数项 $3^{k+2}-1$ 必为偶数。于是 $T(S_k(x))$ 的奇偶性完全由 $3^{k+2}x$ 决定, 即完全由 x 决定。当且仅当 x 为偶数时, $T(S_k(x))$ 为偶数; 当且仅当 x 为奇数时, $T(S_k(x))$ 为奇数。

结论 2:

若 $T(S_k(x))$ 为偶数, 则由结论 1 知 x 为偶数。令 $x=2m$ ($m \geq 0$), 代入得:

$$T(S_k(2m)) = 3^{k+2} - 1 + 2 \times 3^{k+2}m$$

由于 $k \geq 0$, 有 $3^{k+2} \equiv 3 \pmod{6}$, 故 $3^{k+2} - 1 \equiv 2 \pmod{6}$; 又 $2 \times 3^{k+2}m = 6 \times 3^{k+1}m \equiv 0 \pmod{6}$ 。因此 $T(S_k(2m)) \equiv 2 \pmod{6}$, 又其最小值为 8 ($k=0, m=0$ 时), 即存在非负整数 t 使得 $T(S_k(2m)) = 8 + 6t$ 。故偶数分支必属于数列 $8+6t$ 。引理 2 得证。

引理 3 (继续条件与二进制位的关系)。若前 k 步均进入奇数分支 (即第 k 步确实被执行), 则第 k 步进入奇数分支并继续应用 T 运算, 当且仅当初始参数 x 的第 k 个二进制位为 1。

证明: 由引理 2 结论 1, 每一步 T 运算进入奇数分支当且仅当该步参数为奇数。

第 0 步参数为 x , 进入奇数分支当且仅当 x 为奇数, 即 x 的第 0 位为 1。

若第 0 步进入奇数分支, 则运算后新参数为 $m=(x-1)/2$, 即 x 的二进制表示右移一位。故第 1 步进入奇数分支当且仅当 m 为奇数, 即 x 的第 1 位为 1。

依此类推, 若前 $k-1$ 步均进入奇数分支, 则第 k 步参数为 x 右移 k 位, 进入奇数分支当且仅当 x 的第 k 位为 1。证毕。

4.3 定理的证明

证明 (定理 1):

若 $x=0$, 则 $n=5$, $T(5)=8 \in$ 数列 (2), 结论成立。以下设 $x \geq 1$ 。

设初始参数 x 的二进制表示为:

$$x = (x_L \ x_{L-1} \ \cdots \ x_1 \ x_0)_2$$

其中 x_0 为最低位 (第 0 位), x_L 为最高位 (索引为 L , 即 $x_L=1$), 因此 $x < 2^{L+1}$ 。

取 $K=L+1$ 。

则 $K > L$, 因此 $x_K=0$ 。

由引理 3, 第 K 步进入奇数分支当且仅当 $x_K=1$ 。若在前 K 步 (即第 0 步至第 $K-1$ 步) 内已有某步落入偶数分支, 则结论更早成立; 否则前 K 步均进入奇数分支, 此时第 K 步确实被执行。但 $x_K=0$, 故第 K 步不能进入奇数分支, 必然落入偶数分支。

由引理 2, 该偶数属于数列 (2)。

因此, 从任意 $5+6x$ 出发, 至多执行 $K+1$ 次 T 运算 (即第 0 步至第 K 步) 后, 必然落入数列 (2)。定理得证。

4.4 推论

推论 1（收敛步数的上界）。当 $x=0$ 时， $n=5$ 经一次 T 运算即落入数列 (2)。当 $x \geq 1$ 时，设 L 为 x 的最高二进制位的索引（即 $L = \lfloor \log_2 x \rfloor$ ），则至多执行 $K+1$ 次 T 运算（即第 0 步至第 K 步）后，必然落入数列 (2)，其中： $K=L+1$ 。

证明：由定理 1 的证明过程直接可得。

推论 2（数列 (1) 与数列 (2) 的关系）。在执行 T 运算下，数列 (1) 的每一个元素都在有限步内映射到数列 (2) 的某个元素。

证明：由定理 1 直接可得。

5 数值验证

为验证引理 1 与引理 2 的数值正确性，使用 Python（内置大整数支持）对前 12 项进行计算，结果如表 1 所示：

表 1

k	a_k	b_k	c_k 的奇偶性
0	5	6	偶
1	17	18	偶
2	53	54	偶
3	161	162	偶
4	485	486	偶
5	1457	1458	偶
6	4373	4374	偶
7	13121	13122	偶
8	39365	39366	偶
9	118097	118098	偶
10	354293	354294	偶
11	1062881	1062882	偶

注：从表 1 中可以看出：

- 所有 a_k 都严格等于 $2 \times 3^{k+1} - 1$ ；
 - 所有 b_k 都严格等于 $2 \times 3^{k+1}$ ；
 - 所有 $c_k = (3a_k + 1)/2$ 均为偶数； c_k 恒偶是引理 2 结论 1 的直接推论
- 数据与理论推导完全一致，验证了上述结论的正确性。

为验证引理 3 与定理 1（继续条件与二进制位的关系、收敛步数上界），

对若干具体初值参数 x 进行迭代验证，结果如表 2 所示：

表 2

x	x 的二进制	$5+6x$	各步走向	实际 T 运算次数	$K=L+1$
1	1	11	奇 $\rightarrow$ 偶	2	1
2	10	17	偶	1	2
3	11	23	奇 $\rightarrow$ 奇 $\rightarrow$ 偶	3	2
5	101	35	奇 $\rightarrow$ 偶	2	3
7	111	47	奇 $\rightarrow$ 奇 $\rightarrow$ 奇 $\rightarrow$ 偶	4	3
11	1011	71	奇 $\rightarrow$ 奇 $\rightarrow$ 偶	3	4

注：表 2 中“各步走向”指每一步 T 运算进入奇数分支（奇）还是偶数分支（偶）；“实际 T 运算次数”为首次落入偶数（即数列（2））所需次数；“ K ”为推论 1 给出的上界 $K=L+1$ 。由引理 3，第 k 步的走向由 x 的第 k 个二进制位决定，表中各行的走向与该二进制位逐一对应；所有行均满足实际次数 $\leq K+1$ ，与定理 1、推论 1 一致。

6 结论与展望

本文研究了一类特殊数在考拉兹迭代下的局部行为。证明了一个完整的局部定理：

从任意形如 $5+6x$ 的数出发，在 $T(n)=(3n+1)/2$ 运算下，经过有限步后必然落入数列 $8+6x$ 。

证明的核心在于：

1. 将 T 运算过程中出现的所有奇数表示为统一的算术级数形式；
2. 通过归纳法证明了系数的显式公式；
3. 建立了 T 运算继续条件与初始参数二进制表示之间的精确对应关系；
4. 利用二进制表示的有限性完成了终止性证明。

这个结果为考拉兹猜想中除以 6 余 5 这一类数的行为提供了完整且严格的局部描述。

本文的结论虽然是局部的，但它是否与考拉兹猜想的完整框架有所关联，还有待进一步探究。

本文的结果在多个层面上具有理论意义。首先，它为模 6 余 5 数类在复合运算下的行为提供了完整的刻画：不仅证明了收敛性，还给出了收敛步数的显式上界 $K+1=L+2$ ，其中 L 是初始参数的最高二进制位的索引。其次，本文建立的递推框架具有方法论价值：将迭代过程中出现的奇数统一表示为算术级数 a_k+b_kx ，并通过归纳法求出系数的显式表达式，这一思路具有良好的可推广性。最后，本文揭示的迭代继续条件与二进制位之间的一一对应关系，深化了人们对考拉兹迭代中奇偶模式与二进制表示之间内在联系的理解。

未来的研究可以从以下几个方向展开：第一，研究将本方法推广到其他模类的可行性。第二，本文仅讨论复合运算 T 下的局部收敛，不处理偶数后续除以 2 的过程。如果将完整的考拉兹迭代纳入考虑，能否从本文的局部定理出发，进一步证明从 $5+6x$ 出发的轨道最终到达 1？这是一个富有挑战性的问题。第三，研究收敛步数的统计分布：本文给出了步数上界，但步数的实际分布、平均值、中位数等统计性质仍值得深入研究，这可能与二进制位的随机分布密切相关。第四，探索局部定理与完整考拉兹猜想之间的联系：不同模类的局部结果能否拼接成全局证明？各类局部定理之间是否存在内在的逻辑关联？对这些问题的深入探索，可能为最终解决考拉兹猜想提供新的线索和思路。

致 谢：

本研究在数据分析、文献检索、语言润色与排版校对过程中，借助了豆包和 DeepSeek 提供的技术支持，也使用了 C++ 和 Python 编程软件进行数据分析。在此表示衷心的感谢！

本文中全部数学内容与结论均由作者本人完成。

参考文献

- [1] ANGERMUND S. A two-operator calculus for arithmetic-progression paths in the Collatz graph[EB/OL]. arXiv:2506.19115, 2025. <https://arxiv.org/abs/2506.19115>.
- [2] TERRAS R. A stopping time problem on the positive integers[J]. Acta Arithmetica, 1976, 30(3): 241-252.
- [3] EVERETT C J. Iteration of the number-theoretic function $f(2n)=n$, $f(2n+1)=3n+2$ [J]. Advances in Mathematics, 1977, 25(1): 42-45.
- [4] CRANDALL R E. On the "3x+1" problem[J]. Mathematics of Computation, 1978, 32(144): 1281-1292.
- [5] LAGARIAS J C. The $3x+1$ problem and its generalizations[J]. American Mathematical Monthly, 1985, 92(1): 3-23.
- [6] LAGARIAS J C. The $3x+1$ problem: an overview[EB/OL]. arXiv:2111.02635, 2021. <https://arxiv.org/abs/2111.02635>.
- [7] LAGARIAS J C. The $3x+1$ problem: an annotated bibliography (1963-2000)[EB/OL]. arXiv:math/0309224, 2003. <https://arxiv.org/abs/math/0309224>.
- [8] WINKLER M. The algorithmic structure of the finite stopping time behavior of

the $3x+1$ function[EB/OL]. arXiv:1709.03385, 2017. <https://arxiv.org/abs/1709.03385>.

[9] REN W. Collatz dynamics is partitioned by residue class regularly[EB/OL]. arXiv:2304.11388, 2023. <https://arxiv.org/abs/2304.11388>.

[10] TAO T. Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values[EB/OL]. arXiv:1909.03562, 2019. <https://arxiv.org/abs/1909.03562>.

[11] 周传忠. 对叙拉古猜想的一些讨论 [J]. 华南师范大学学报（自然科学版）, 1995, 27 (3): 103-105.

[12] 崔岩, 崔朝栋. $3N+1$ 猜想证明探索 [J]. 北华航天工业学院学报, 2020, 30 (3): 1-3.

附录 1：主要符号表

符号	含义
x	非负整数参数(初始参数; 第 k 步当前参数在不致混淆时亦记为 x)
$T(n)$	复合运算 $(3n+1)/2$
$S(x)$	一般形式的奇数列 $a+bx$
$S_k(x)$	第 k 步的奇数列 a_k+b_kx
a, b	一般奇数列的常数项与系数 (a 奇, b 偶)
a_k, b_k	第 k 步奇数列的常数项与系数
c, d	一般递推量 $c=(3a+1)/2, d=3b/2$
c_k, d_k	第 k 步递推量 $c_k=(3a_k+1)/2, d_k=3b_k/2$
x_i	初始参数 x 的第 i 个二进制位
L	初始参数 x 的最高二进制位索引
K	收敛步数上界索引, $K=L+1$

作者简介

郝占柱, 男, 1956 年生, 学士, 高级工程师(副高), 研究方向: 数论

E-mail: 1832357610@qq.com.

作者贡献声明

郝占柱: 提出研究思路, 设计研究方案; 利用 C++ 和 Python 编程软件寻找、总结迭代的规律; 决定采用复合运算 $T(n)=(3n+1)/2$ 以及奇偶数列拆分, 利用二进制表示的有限性完成终止性证明; 完成论文起草和最终版本修订。

