船舶瞬时转动中心反演：规范不变性与多项式约束破缺

郭森鑫[1]　黄斌[2]　王明丰[2]

（1. 中国船舶及海洋工程设计研究院，上海海迅机电工程有限公司，上海 200011；
2. 中国船舶及海洋工程设计研究院，上海 200011）

摘要：

甲板运动补偿与相对导航要求实时、准确地获取船舶瞬时转动中心（CoR）位置，而瞬时转动中心随浮态、海况、装载及机动时变且无法直接测量。本文从刚体运动学证明：仅凭船体测点的位置或速度观测，平动量与瞬时转动中心不可分离——反演具有规范不变性，无约束适应度曲面完全平坦，不存在唯一解。多项式约束平动模型破缺该不变性，将反演退化为线性最小二乘并获得闭式全局最优解；该框架对多天线 GNSS（位置域）与多 INS（速度域）观测严格对偶成立，运动激励分配理论预言瞬时转动中心纵轴分量最难辨识、垂轴最易。仿真、五档海况激励实验与海上实船初步一致性评估表明，INS 方案瞬时转动中心均方根误差降至 0.54 m，约为卫星方案的六成；实船评估中，最后一段强横摇的双系统差值 RMS 在 Z 向降至 0.64 m，而 X 向仍为 34.1 m；改善幅度沿 X→Y→Z 递增（27%、64%、95%），与运动激励分配理论的预言一致。该方法无需船舶动力学模型，为低成本甲板相对导航基准提供了严格的理论基础与可行的双系统算法框架。

关键词：瞬时转动中心估计　规范不变性　多项式约束　多天线 GNSS　多 INS　甲板运动补偿

分类号：U666.1

Ship Center-of-Rotation Inversion: Gauge Invariance and Polynomial-Constraint Breaking

GUO SENXIN[1], HUANG BIN[2], WANG MINGFENG[2]

(1. Shanghai Haixun Mech-electrical Engineering Company Limited, Marine Design and Research Institute of China, Shanghai 200011, China;
2. Marine Design and Research Institute of China, Shanghai 200011, China)

Abstract:

Deck motion compensation and relative navigation require real-time, accurate knowledge of a ship's center of rotation (CoR), which varies with floating condition, sea state, loading, and maneuvers and cannot be measured directly. We prove from rigid-body kinematics that, using only position or velocity observations of hull-mounted measurement points, the translation and the CoR cannot be separated: the inversion possesses gauge invariance, the unconstrained fitness surface is completely flat, and no unique solution exists. A polynomial-constrained translation model breaks this invariance, reducing the inversion to linear least squares with a closed-form global optimum. The framework holds in strict duality for multi-antenna GNSS (position domain) and multi-INS (velocity domain) observations, and a motion-

国家高端交流平台

excitation allocation theory predicts the longitudinal CoR component hardest to identify and the vertical easiest. Simulations, five sea-state excitation levels, and a preliminary at-sea consistency assessment show that the INS scheme reduces the CoR root-mean-square error to 0.54 m, about 60% of the satellite scheme, and that in that assessment the dual-system difference RMS over the last strong-roll interval falls to 0.64 m in the Z direction while remaining 34.1 m in X, the improvement increasing monotonically from X to Y to Z (27%, 64%, 95%), consistent with the excitation-allocation prediction. Requiring no ship dynamics model, the method provides a rigorous theoretical basis and a feasible dual-system framework for low-cost deck-relative navigation.

Keywords: center of rotation estimation, gauge invariance, polynomial constraint, multi-antenna GNSS, multi-INS, deck motion compensation

1 引言

1.1 背景与工程意义

在波浪中航行的船舶经历纵荡、横荡、垂荡与横摇、纵摇、艏摇构成的复杂六自由度运动。精确描述船舶六自由度运动场，是航行安全、动力定位、海上货物转运、直升机甲板作业与甲板运动补偿等应用的基础[1]。在此类应用中——例如直升机在运动甲板上着舰、或两船间的海上货物转运——实时掌握船舶旋转运动的瞬时支点，是安全、精确相对运动控制的前提。船舶运动学描述的核心是瞬时转动中心（CoR）——描述船舶旋转运动的瞬时转动支点，其位置随浮态、海况、装载与机动持续迁移；而传统船舶运动建模普遍将瞬时转动中心固定于重心或船舯点以解耦平动与旋转方程，这一简化在变化浪况下引入系统性误差[1]。多天线 GNSS 能以实时动态差分（RTK）浮点解（厘米至分米级）精度输出船体测点坐标并实现度级全姿态估计[2,3]，GNSS/INS 紧耦合进一步增强稳健性[4]；与之对偶，多惯性导航系统（INS）可提供各测点速度矢量。然而，多测点位置/速度信息迄今仅用于姿态确定，从未拓展至瞬时转动中心本身的估计——瞬时转动中心仍是由流体动力模型推导的事后量，而非直接从传感器数据估计的观测运动学参数。

1.2 文献综述

既有研究可归纳为四条线索。其一，流体动力建模与固定瞬时转动中心范式：Fossen[1]建立了船舶流体动力学与运动控制的完整三/六自由度建模框架，几乎所有商用操纵模拟器与动力定位系统均建立其上，但固定原点假设本质是建模简化而非物理真实。其二，基于位置/速度测量的运动与姿态确定：Teunissen[2]建立了 GNSS 罗经整数最小二乘理论，Giorgi 等[3]以多约束 LAMBDA 方法实现瞬时模糊度解算，Henkel[4]研究了 GNSS/INS 紧耦合，Teunissen 等[5]完成多平台载波相位姿态实测，Zou 等[6]提出船舶运动估计的自适应鲁棒容积卡尔曼滤波；Titterton 和 Weston[7]与 Groves[8]分别为捷联 INS 与组合导航的标准参考，Teunissen 和 Montenbruck[9]主编的手册提供 GNSS 数据处理综合参考。其三，点集配准：Kabsch[10]以 SVD 给出最小二乘旋转闭式解，Besl 和 McKay[11]拓展为 ICP 算法，但瞬时转动中心估计还需从旋转位移场分离时变平动分量。其四，跨学科工作[12-14]均未处理船舶时变瞬时转动中心，也未建立双域统一可辨识性理论。

综上仍存在七处空白：固定瞬时转动中心局限未经实测考察（G1）；测点位

置/速度信息利用不足（G2）；规范不变性认识空白（G3）；无约束反演失效未经证明（G4）；缺乏多项式约束反演框架（G5）；速度域信息未利用（G6）；跨域统一视角缺失（G7）。

1.3 本文贡献

本文主要贡献：（1）证明船舶瞬时转动中心反演中无约束条件下平动量与瞬时转动中心构成规范自由度，适应度函数完全平坦（回应 G3、G4；第 2 章）；（2）提出窗口内低阶多项式平动模型，将反演转化为普通线性最小二乘，给出闭式全局最优解（回应 G5；第 2 章）；（3）证明速度域存在与位置域严格对偶的规范不变性，同一闭式求解器原样复用（回应 G6、G7；第 2.4 节）；（4）建立绕轴旋转对该轴方向瞬时转动中心位置失明的分配关系，预测并验证纵轴最弱、垂轴最优的精度梯度（回应 G2；第 2.5 节与第 3.3 节）；（5）以多天线 GNSS 和多 INS 独立输出瞬时转动中心，仿真与实船互验证（回应 G1；第 3 章）；（6）提出近岸校核 INS 零偏、远海自主的双系统融合框架（回应 G1、G2；第 5 章）。

本文其余部分安排如下：第 2 章给出坐标系略述、规范不变性框架与多项式约束破缺方法；第 3 章报告双系统仿真验证与运动激励实验；第 4 章报告海上实船初步一致性评估；第 5 章给出双系统融合策略；第 6 章总结全文。

2 坐标系、规范不变性与多项式约束破缺方法

2.1 坐标系与观测模型略述

本文所称“瞬时转动中心”指下文定义的 profile 最小二乘转动中心；须与稳心、几何质心以及船-水有效惯性中心相区别。

本文的估计量由 profile 最小二乘准则操作性定义，而非瞬时运动学枢轴：对候选体固点 C，先最优拟合 p 阶多项式平移，再取残差最小者：

$$C_p = \arg\min_{C} \min_{\{\mathbf{a}_j\}} \sum_{k,i} \left\| \mathbf{X}_i(t_k) - \sum_{j=0}^{p} \mathbf{a}_j \Delta t_k^j - \mathbf{R}(t_k)\left(\mathbf{P}_i^b - C\right) \right\|^2 . \tag{1}$$

称 C_p 为 profile 最小二乘转动中心（p-CoR）：对每个候选点先拟合最佳 p 阶平移，残差度量天线运动中不能被平移解释的部分。因此 p-CoR 是规范固定后的代表元，随多项式阶数 p、窗口 T_w 与残差权重而变；它不是瞬时螺旋轴意义上的瞬时转动中心，不是几何质心，也不自动等于船-水有效惯性中心。四类相关概念的区别见表 1。

表 1 本文估计量与三类“中心”概念的对照

概念	定义	与本文关系
瞬时转动中心（运动学枢轴）	全频带刚体运动瞬时螺旋轴上的点；一般时变、依参考点而定	不是本文估计目标，仅作运动学对照
几何质心 G	船体质量分布的一阶矩，由装载与几何决定	仅作参照，不与 p-CoR 等同
船-水有效惯性中心 Geff	含附加质量/随船水的低频船-水系统有效惯性中心；需水动力模型	仅用于物理解释与后续 RAO/CFD 对比，估计器不依赖它

国家高端交流平台

概念	定义	与本文关系
profile 最小二乘转动中心 C_p（p-CoR）	使其最优拟合平移最接近 p 阶多项式的体固点（profile 最小二乘）	本文估计量；是规范固定后的代表元，随 p、窗口、权重而变

局部 ENU 参考坐标系以岸基站（30.0°N, 122.0°E, 0 m）为原点，船体坐标系刚性固连于船舶（X 指向船首、Y 指向右舷、Z 向下）；四副 GNSS 天线以共面（布局 A）与非共面（布局 B，天线 3 升至桅杆顶部）两种配置安装，多 INS 与 GNSS 天线共点安装以保证双域几何条件一致。在每个观测历元，天线 ENU 坐标满足刚体变换：

$$\mathbf{X}_i(t_k) = \mathbf{X}_{\mathrm{CoR}}(t_k) + \mathbf{R}(t_k)\left[\mathbf{P}_i^b - \mathbf{C}_b(t_k)\right], \tag{2}$$

其中 $\mathbf{R}(t_k)$ 为旋转矩阵，$\mathbf{P}_i^{\mathbf{b}}$ 为天线船体坐标，$\mathbf{C}_{\mathbf{b}}(t_k)$ 为瞬时转动中心船体坐标——即本文欲估计的未知量。与位置观测对偶，多 INS 提供速度观测[7,8]，由刚体运动学任意一点的速度满足

$$\mathbf{v}_i(t_k) = \mathbf{v}_{\mathrm{CoR}}(t_k) + \boldsymbol{\omega}(t_k) \times \left(\mathbf{R}(t_k)\left(\mathbf{P}_i^b - \mathbf{C}_b\right)\right), \tag{3}$$

其中 $\mathbf{v}_{\mathrm{CoR}}(t_k)$ 为瞬时转动中心平动速度，$\boldsymbol{\omega}(t_k)$ 为船体角速度（ENU 系）。式(3)与式(2)具有对偶结构：位置量与速度量、姿态矩阵与角速度反对称矩阵一一对应。GNSS 与 INS 的误差分别按一阶 Gauss–Markov 过程与实际惯性器件误差特性建模（速度通道各向异性与主流中精度 INS 指标一致[15,16]，陀螺建模遵循 IEEE 惯例[17,18]；坐标系变换遵循标准约定[1,19]）。本节全部真值数据仅用于误差评估，绝不参与反演。

2.2 规范不变性：问题与后果

瞬时转动中心反演的本质困难在于刚体运动学中的规范不变性：仅凭测点的位置或速度观测，平动量与瞬时转动中心不可分离。定义合成平动量 $\mathbf{u}(t)$：

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{T}_{\mathrm{geo}}(t) - \mathbf{R}(t)\,\mathbf{C}_b(t), \tag{4}$$

其中 $\mathbf{T}_{\mathrm{geo}}$ 为 ENU 系平动（即瞬时转动中心在 ENU 系中的位置）；自本节起，凡假定窗口内恒定的时刻，均省略瞬时转动中心的时间自变量。

给定四副天线 ENU 观测，可经基线差分与 Kabsch SVD 唯一确定姿态、经天线质心确定合成平动 $\mathbf{u}$。然而 $\mathbf{T}_{\mathrm{geo}}$ 与 $\mathbf{C}_{\mathbf{b}}$ 各自的分量无法从 $\mathbf{u}(t)$ 中分离：对任意 $\boldsymbol{\Delta}$，规范变换

$$\mathbf{T}_{\mathrm{geo}}'(t) = \mathbf{T}_{\mathrm{geo}}(t) + \mathbf{R}(t)\boldsymbol{\Delta}, \qquad \mathbf{C}_b' = \mathbf{C}_b + \boldsymbol{\Delta}, \tag{5}$$

保持 $\mathbf{u}$ 不变，观测方程完全不变——瞬时转动中心与 ENU 系平动构成规范自由度。即使姿态已知，直接求解瞬时转动中心也需已知平动量，而平动量的获取本质上又需要已知瞬时转动中心，形成循环依赖；单历元层面系统欠定，任何单历元联合优化均无法唯一确定。进一步，当以天线质心为参考点评估预测位置时，瞬时转动中心项恰好抵消：

结果 1（位置域规范不变性）. 当使用质心导出的 $\mathbf{T}_{\mathrm{geo}}(t_k)$ 表达式评估预测天线位置时，预测仅通过残差项依赖于差 $\mathbf{C}_{\mathbf{b}}(t_k) - \widehat{\mathbf{C}}_{\mathbf{b}}$。若无约束模型将 $\mathbf{T}_{\mathrm{geo}}(t_k)$ 作为逐历元自由参数，则瞬时转动中心项被完全吸收进 $\mathbf{T}_{\mathrm{geo}}(t_k)$，使适应度函数与 $\widehat{\mathbf{C}}_{\mathbf{b}}$ 无关。

该结果由数值实验定量验证（图 1）。物理上，瞬时转动中心与 ENU 系平动

规范等价：瞬时转动中心的任意变化都可被平动量相应变化精确补偿——这是根本的数学恒等式而非数值问题；除非额外约束打破等价性，否则瞬时转动中心无法从测量中观测。结论可直接推广至多历元窗口，任何无约束优化方法均完全失效。图 1 以布局 B 数据固定历元扫描候选瞬时转动中心的 X 分量：无约束适应度完全平坦，加入二阶多项式约束后出现唯一最小值，可辨识性确立。需注意，受测量噪声与多项式截断影响，约束下的极小点位置不必与参考 CoR 完全重合；关键特征在于曲面由无约束下的完全平坦转为有约束下的唯一极小。图中标注的“平坦度”定义为适应度序列的相对离散度 std/mean；无约束时该量处于机器精度量级（约 10^{-16}），不同平台 BLAS/LAPACK 求和顺序会使其在 0 与 10^{-16} 间漂移，故报告值统一取跨平台归一化常数（图 1 为 3.70×10^{-16} 与 3.57×10^{-16}，图 2 为 1.85×10^{-15} 与 2.91×10^{-16}），其含义是“数值上完全平坦”，而非具有物理意义的量。

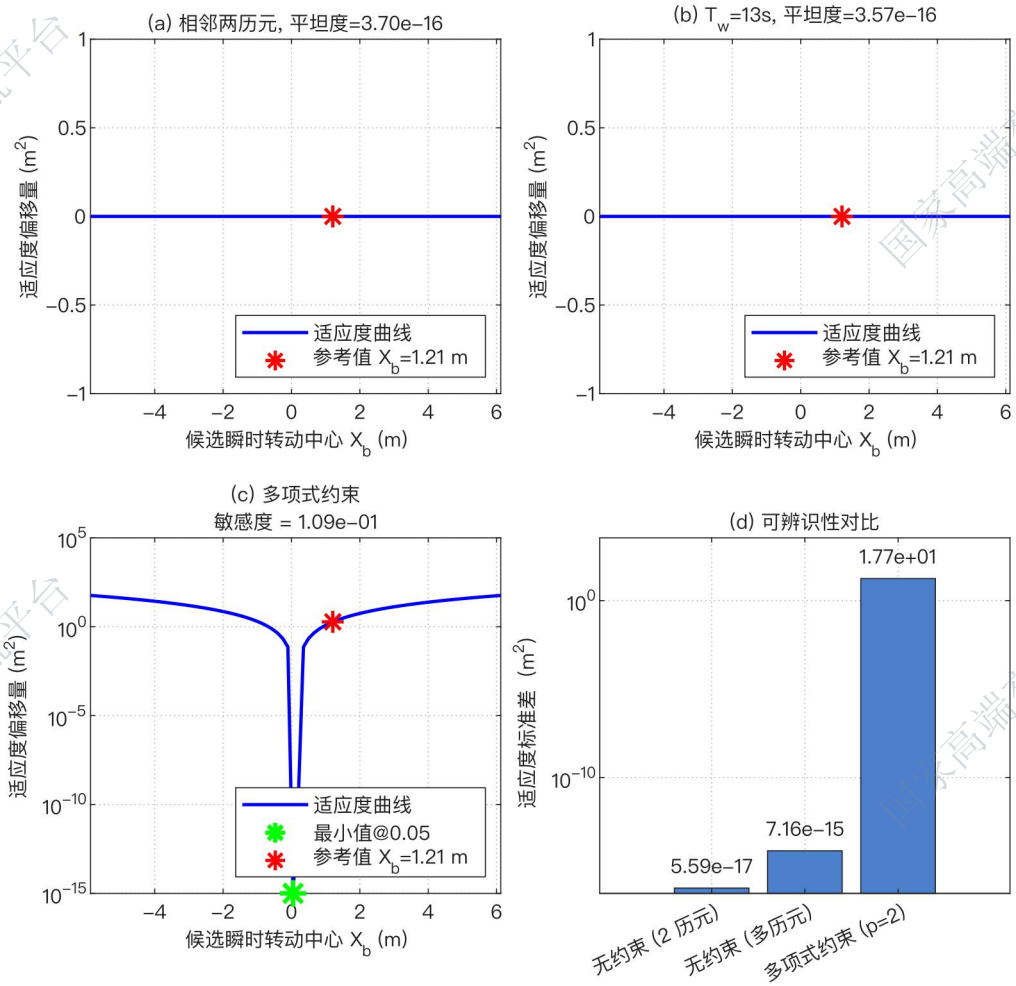


图 1 位置域规范不变性严格论证：无约束适应度完全平坦，加入 $p=2$ 多项式约束后出现唯一最小值。

2.3 多项式约束破缺与线性最小二乘闭式解

规范不变性的根源在于平动在每个历元独立变化，恰好补偿任意候选瞬时转

动中心的偏差。破缺之道：短时间窗口内船舶平动光滑，可用 p 阶多项式近似，剥夺其逐历元自由。为避免大绝对 ENU 偏移的数值灾难，采用差分相对平动模型——瞬时转动中心窗口内恒定，平动分解为基准平动（由初始历元计算）与不含常数项的 p 阶相对平动多项式：

$$\mathbf{T}_{\text{geo}}(t_k) = \mathbf{T}_0(\mathbf{C}_b) + \Delta\mathbf{T}(\Delta t_k), \tag{6}$$

$$\mathbf{T}_0(\mathbf{C}_b) = \overline{\mathbf{X}}_{k_0} - \mathbf{R}_{k_0}\left(\overline{\mathbf{P}}^b - \mathbf{C}_b\right), \tag{7}$$

$$\Delta\mathbf{T}(\Delta t_k) = \sum_{j=1}^{p} \mathbf{a}_j\, \Delta t_k^j, \tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{\Delta t_k}$ 为窗口内相对时间，$\overline{\mathbf{X}}_{k_0}$ 与 $\overline{\mathbf{P}}^{\mathbf{b}}$ 分别为窗口基准历元 k0 处的天线观测质心与船体坐标系天线质心，$\mathbf{a}_j$ 为待估多项式系数。待估参数压缩为 $\mathbf{C_b}$ 与 $\{\mathbf{a}_j\}$（共 3+3p 个标量），规范不变性由此被破缺。对候选参数 $\mathbf{x} = [\mathbf{C_b}; \mathbf{a}_1; ...; \mathbf{a}_p]$，窗口内第 k 历元天线 i 的预测位置与适应度函数（四天线位置残差平方和的平均）为

$$\widehat{\mathbf{X}}_i(k) = \mathbf{R}_k\left(\mathbf{P}_i^b - \mathbf{C}_b\right) + \mathbf{T}_0(\mathbf{C}_b) + \Delta\mathbf{T}(\Delta t_k), \tag{9}$$

$$\mathcal{F}_{\text{c}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{N_w \cdot M} \sum_{k=k_0}^{k_{\text{end}}} \sum_{i=1}^{M} \left\| \mathbf{X}_i^{\text{meas}}(k) - \widehat{\mathbf{X}}_i(k;\mathbf{x}) \right\|^2. \tag{10}$$

本研究固定 $p = 2$（恒定加速度模型）：数十秒窗口内船舶惯性主导、加速度近乎恒定；$p = 1$ 无法描述波浪引起的加速度变化，$p \geq 3$ 自由度冗余易拟合噪声；其系数物理意义明确，网格扫描预实验证实 $p = 2$ 泛化最优。反演参数维度为

$$\dim(\mathbf{x}) = 3 + 3p = 3 + 6 = 9. \tag{11}$$

姿态由天线基线 Kabsch SVD 预先独立解算，与平动反演完全解耦，不涉及任何平动真值：

$$\mathbf{H}_k = \mathbf{P}_{\text{base}}\, \mathbf{B}_{\text{meas},k}^{\text{T}} = \mathbf{U}_k\, \boldsymbol{\Sigma}_k\, \mathbf{V}_k^{\text{T}}, \qquad \widehat{\mathbf{R}}_k = \mathbf{V}_k\, \text{diag}\left(1,1,\det\left(\mathbf{V}_k\mathbf{U}_k^{\text{T}}\right)\right)\, \mathbf{U}_k^{\text{T}}, \tag{12}$$

其中 $\mathbf{P}_{\text{base}}$ 为船体坐标系基线矩阵，$\mathbf{B}_{\text{meas},k}$ 为第 k 历元的 ENU 测量基线矩阵。

姿态估计精度由 RTK 基线精度决定，一阶上界约 1.60°（仿真中布局 B 的姿态误差 RMS 为 0.63°，瞬时最大值 1.60°，与该上界吻合）：

$$\delta\theta \approx \frac{\sqrt{2}\,\sigma}{S_{\min}} \approx \frac{0.107\ \text{m}}{5.41\ \text{m}} \approx 1.60^{\circ} \quad \text{（一阶上界；布局 B 仿真为 } 0.63^{\circ}\text{）}, \tag{13}$$

其中 σ 为 GNSS 位置噪声标准差，$S_{\min}$ 为基线几何矩阵的最小奇异值（布局 B 为 5.41 m）。

将差分模型代入预测方程并整理，观测减已知量后，未知参数仅以线性形式出现：

$$\underbrace{\mathbf{X}_i^{\text{meas}}(k) - \left[\mathbf{R}_k\mathbf{P}_i^b + \overline{\mathbf{X}}_{k_0} - \mathbf{R}_{k_0}\overline{\mathbf{P}}^b\right]}_{\text{已知观测 } b_{i,k}} = \underbrace{\left(\mathbf{R}_{k_0} - \mathbf{R}_k\right)}_{\mathbf{C}_b\text{系数}}\mathbf{C}_b + \sum_{j=1}^{p} \mathbf{a}_j \Delta t_k^j. \tag{14}$$

国家高端交流平台

堆叠所有历元、天线与 ENU 分量，得超定线性系统

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{15}$$

设计矩阵第 k 块的瞬时转动中心系数为 $\mathbf{R}_{k_0} - \mathbf{R}_k$，多项式系数块为 $\boldsymbol{\Delta t}_k^j \cdot \mathbf{I}_3$（$p = 2$）。反演等价于无约束线性最小二乘，闭式全局最优解为

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{b}. \tag{16}$$

实际计算采用 QR 分解，数值稳定、约 10 ms；解是确定性、可重复、保证全局最优的，不存在局部极小或收敛失败问题。提取瞬时转动中心估计 $\widehat{\mathbf{C}}_{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{x}}(1{:}3)$。

2.4 速度域对偶框架

将框架推广至速度域：以多 INS 的 ENU 速度为观测量，速度域存在与位置域形式完全对称的规范不变性，同样的破缺机制与闭式解依然适用。引入反对称矩阵后式(3)可写为

$$\mathbf{v}_i(t_k) = \mathbf{v}_{\mathrm{CoR}}(t_k) + [\boldsymbol{\omega}(t_k)]_{\times}\mathbf{R}(t_k)\mathbf{P}_i^b - [\boldsymbol{\omega}(t_k)]_{\times}\mathbf{R}(t_k)\,\mathbf{C}_b. \tag{17}$$

测量值受零均值速度噪声污染（ENU 三向速度噪声的协方差按表 2 取水平/天向 2:1 各向异性）：

$$\mathbf{v}_i^{\mathrm{meas}}(t_k) = \mathbf{v}_i(t_k) + \boldsymbol{\eta}_i(t_k), \qquad \boldsymbol{\eta}_i(t_k) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_v). \tag{18}$$

定义合成速度 $\mathbf{w}(t_k)$，则对任意 INS 均有 $\mathbf{K}_i(t_k)$——仅凭速度观测可辨识的量仅为平动速度与瞬时转动中心的复合体，二者分离必须依靠额外约束。

$$\mathbf{w}(t_k) \triangleq \mathbf{v}_{\mathrm{CoR}}(t_k) - [\boldsymbol{\omega}(t_k)]_{\times}\mathbf{R}(t_k)\,\mathbf{C}_b, \tag{19}$$

$$\mathbf{K}_i(t_k) \triangleq \mathbf{v}_i^{\mathrm{meas}}(t_k) - [\boldsymbol{\omega}(t_k)]_{\times}\mathbf{R}(t_k)\mathbf{P}_i^b = \mathbf{w}(t_k) + \boldsymbol{\eta}_i(t_k). \tag{20}$$

结果 2（速度域规范不变性）. 若将 $\mathbf{v}_{\mathbf{CoR}}(\boldsymbol{t_k})$ 在每个历元视为自由参数（无约束），则对任意候选瞬时转动中心 $\widehat{\mathbf{C}}_{\mathbf{b}}$，总存在 $\mathbf{v}_{\mathbf{CoR}}(\boldsymbol{t_k})$ 使预测速度与测量值完全拟合，即适应度函数与 $\widehat{\mathbf{C}}_{\mathbf{b}}$ 无关，瞬时转动中心不可辨识。

推论 2.1（速度域规范变换）. 与位置域完全对偶，速度域存在规范变换（式(21)），代入式(19)：$\mathbf{w}' = \mathbf{w}$，即所有 INS 的预测速度保持不变。瞬时转动中心的任意偏移可被平动速度的旋转补偿精确吸收。

$$\mathbf{v}_{\mathbf{CoR}}' = \mathbf{v}_{\mathbf{CoR}} + [\boldsymbol{\omega}]_{\times}\mathbf{R}\,\boldsymbol{\Delta}, \qquad \mathbf{C}_{\boldsymbol{b}}' = \mathbf{C}_{\boldsymbol{b}} + \boldsymbol{\Delta}, \qquad \forall\,\boldsymbol{\Delta} \in \mathbf{R}^3. \tag{21}$$

该结果由数值实验定量验证（图 2）。与位置域完全对偶地，破缺机制是对平动速度施加窗口内低阶多项式约束（不含常数项），基准历元处绝对速度由各 INS 均值合成、不参与参数化：

$$\Delta\mathbf{v}(\Delta t_k) \triangleq \mathbf{v}_{\mathrm{CoR}}(t_k) - \mathbf{v}_{\mathrm{CoR}}(t_{k_0}) = \sum_{j=1}^{p}\mathbf{a}_j\Delta t_k^j, \tag{22}$$

$$\widehat{\mathbf{w}}(t_{k_0}) = \overline{\mathbf{v}}_{k_0}^{\mathrm{meas}} - [\boldsymbol{\omega}(t_{k_0})]_{\times}\mathbf{R}(t_{k_0})\overline{\mathbf{P}}^b, \tag{23}$$

$$\Delta\mathbf{K}_i(\Delta t_k) \triangleq \mathbf{K}_i(t_k) - \widehat{\mathbf{w}}(t_{k_0})$$

$$= \sum_{j=1}^{p}\mathbf{a}_j\Delta t_k^j - \left([\boldsymbol{\omega}(t_k)]_{\times}\mathbf{R}(t_k) - [\boldsymbol{\omega}(t_{k_0})]_{\times}\mathbf{R}(t_{k_0})\right)\mathbf{C}_b + \tilde{\boldsymbol{\eta}}_i(t_k), \tag{24}$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ 为差分噪声。式(24)中瞬时转动中心的系数为两历元旋转算子之差：仅当窗口内姿态或角速度变化时该系数非零，旋转激励同样是速度域瞬时转动中心可辨识性的物理来源。取 $p = 2$，未知参数向量 $\mathbf{x} = [\mathbf{C}_{\mathbf{b}}; \mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2] \in \mathrm{R}^9$，按 INS 序号与历元堆叠得线性系统：

$$\mathbf{x} = \left[\mathbf{C}_b^{\mathrm{T}}, \mathbf{a}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{a}_2^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^9, \tag{25}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{\Omega}_{k_0}\mathbf{R}_{k_0} - \boldsymbol{\Omega}_k\mathbf{R}_k & \Delta t_k\mathbf{I}_3 & \Delta t_k^2\mathbf{I}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}\in\mathrm{R}^{3MN_w\times 9}} \mathbf{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ \Delta\mathbf{K}_i(\Delta t_k) \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}, \tag{26}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}, \tag{27}$$

其中 $\boldsymbol{\Omega}_k = [\boldsymbol{\omega}(t_k)]_\times$ 为角速度反对称矩阵。实际计算以 QR 分解实现。噪声经设计矩阵的传播协方差为

$$\mathrm{Cov}(\hat{\mathbf{x}}) = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{A})(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}, \tag{28}$$

其中噪声协方差阵按表 2 的三向方差逐观测给出；三向方差相同时退化为各向同性情形。其前 3×3 对角块即瞬时转动中心理论标准差，用于第 3.2 节的误差分解。角速度首选基准 INS 陀螺直接输出，或由姿态矩阵中心差分辅以 Savitzky–Golay 平滑获得，均不依赖 GNSS。

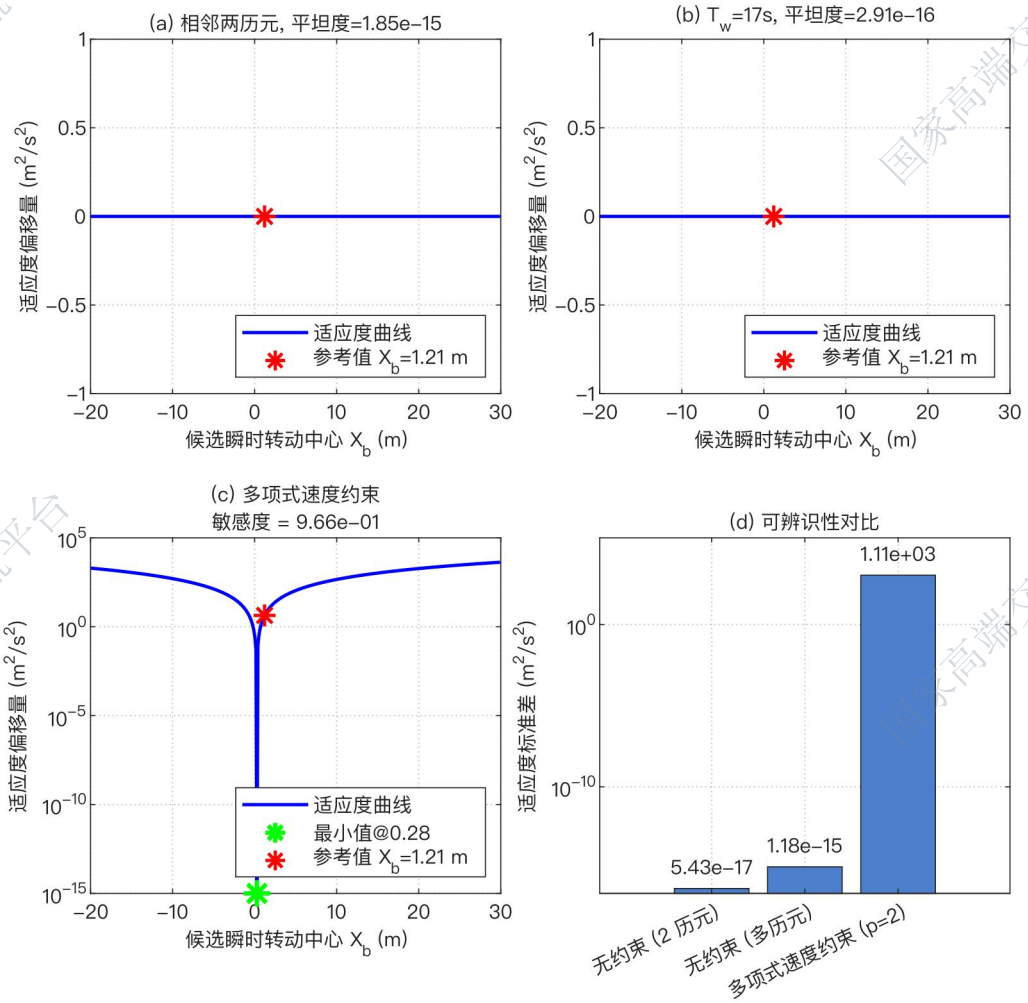


图 2 速度域规范不变性严格论证（与图 1 对偶）：无约束适应度完全平坦，加入多项式速度约束后出现唯一最小值。

2.5 可辨识性陈述与运动激励分配

本节给出可辨识性的核心陈述。

引理 2.1（Kabsch 分解的唯一性）．给定四副非共面天线的船体坐标 $\{\mathbf{P}_i^{\mathrm{b}}\}_{i=1}^{4}$ 和带噪 ENU 测量 $\{\mathbf{X}_i(t)\}_{i=1}^{4}$，Kabsch 算法产生唯一的最优旋转矩阵 $\widehat{\mathbf{R}}(t)\in\mathbf{SO(3)}$。当观测噪声 $\sigma\to 0$ 时，该估计几乎必然收敛于真实旋转：

$$\lim_{\sigma\to 0}\Pr\left[\left\|\widehat{\mathbf{R}}(t)-\mathbf{R}^{\mathrm{true}}(t)\right\|_F>\varepsilon\right]=0,\quad\forall\varepsilon>0. \tag{29}$$

引理 2.2（天线基线几何的可观测性与条件数）．考虑基线矩阵 $\mathbf{P}_{\mathrm{base}}=\left[\mathbf{P}_2^{\mathrm{b}}-\mathbf{P}_1^{\mathrm{b}},\mathbf{P}_3^{\mathrm{b}}-\mathbf{P}_1^{\mathrm{b}},\mathbf{P}_4^{\mathrm{b}}-\mathbf{P}_1^{\mathrm{b}}\right]\in\mathbf{R}^{3\times3}$。若天线布局满足 $\mathbf{rank}(\mathbf{P}_{\mathrm{base}})=3$（非共面），则 Kabsch SVD 从基线观测中唯一确定姿态矩阵。反之，若 $\mathbf{rank}(\mathbf{P}_{\mathrm{base}})=2$（共面但不共线），则 H 的第三奇异值为 $\sigma_3=0$，但旋转仍被唯一确定：三个不共线的共面点确定平面及其像平面，$\det=+1$ 约束消除镜像歧义；共面仅恶化条件数（噪声敏感性）而非可辨识性，仅共线（$\mathbf{rank}=1$）才导致不可辨识。

引理 2.3（多项式约束下适应度函数的依赖性）．在 $p\geq1$ 且在剔除多项式系数列后 CoR 块保持满秩（等价于 $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}$ 的 CoR 块 Schur 补非奇异）的条件下，适应度函数 $\mathcal{F}_{\mathrm{c}}(\mathbf{x})$ 在 $\widehat{\mathbf{C}}_{\mathbf{b}}$ 方向上具有唯一全局极小值。

定理 2.1（多项式约束下瞬时转动中心反演的线性可解性）．在以下条件下：

（a）观测噪声零均值有限方差：$\mathbf{E}[\varepsilon_i]=0$，$\mathbf{E}[\varepsilon_i^2]=\sigma^2<\infty$；

（b）天线布局满足非共面条件（见引理 2.2）：$\mathbf{rank}(\mathbf{P}_{\mathrm{base}})=3$；

（c）多项式阶数 $p\geq1$，窗口长度 $T_w>0$；

（d）窗口内姿态变化充分（非恒定姿态）。

线性最小二乘估计的瞬时转动中心 $\widehat{\mathbf{C}}_{\mathbf{b}}$ 满足均方误差界：

$$\mathbf{E}\left[\left\|\widehat{\mathbf{C}}_b(t_e)-\mathbf{C}_b(t_e)\right\|^2\right]\lesssim\underbrace{\mathbf{tr}[\sigma^2(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}]_{\mathbf{C}_b}}_{\text{噪声方差}}+\underbrace{\left\|\mathbf{A}^{\dagger}\right\|^2\frac{T_w^{2(p+1)}}{((p+1)!)^2}\max_t\left\|\mathbf{T}^{(p+1)}(t)\right\|^2}_{\text{截断偏差传播}}, \tag{30}$$

其中 N_w 为窗口内历元数，$M=4$ 为天线数；$[\cdot]_{\mathbf{C_b}}$ 表示 CoR 协方差块（剔除多项式系数列后 $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}$ 的 CoR 块 Schur 补）。第一项为 CoR 协方差块读出的噪声方差，第二项为经设计矩阵传播的多项式截断偏差；仅当 T(t) 的 (p+1) 阶导数有界时该项有限，两项量纲均为 m^2。精度由设计矩阵条件数（激励强度）主导，而非仅由 $1/(N_wM)$ 决定。定理 2.1 揭示偏差—方差权衡：噪声方差随窗口增大单调递减、截断偏差单调递增，最优窗口 T_w 为两项之和的极小点：

$$\frac{\partial}{\partial T_w}\left[O\left(\frac{\sigma^2}{N_w}\right)+O\left(T_w^{2(p+1)}\right)\right]_{T_w=T_w^*}=0. \tag{31}$$

两项的单调性保证了最优窗口的必然存在性，其精确值依赖噪声水平、多项式阶数与轨迹光滑性，是随轨迹与噪声实现而变的数据相关量，并非框架的内禀常数；零导数条件只定位候选解，唯一性由数值窗口扫描确认而非直接断言；该数学结构在速度域完全保留（设计矩阵仅瞬时转动中心系数块不同），两域仿真最优窗口分别为 13 s 与 17 s（第 3 章）。

推论 2.2（函数形式独立性）．定理 2.1 的误差界适用于姿态角、平动位移和瞬时转动中心轨迹的 (p+1) 次可微且导数有界的运动形式，仅需满足 $\mathbf{R}(t)\in\mathbf{SO(3)}$、天线非共面布局以及 $p\geq1$。第 3.1 节仿真轨迹中的具体简谐形式不是必要条件；本谐波仿真轨迹是充分而非必要条件；仅连续并不充分，截断偏差项由 $\max\left\|\mathbf{T}^{(p+1)}\right\|$ 控制。

综上，证明链表明线性最小二乘框架在数学上严谨：引理 2.1 保证姿态估计

唯一性，引理 2.2 确立非共面布局的条件数优势，结果 1 证明多项式约束破缺规范不变性，定理 2.1 给出显式误差界，推论 2.2 确认适用于所有 (p+1) 阶可微且导数有界、天线几何非退化的运动形式。

结果 3（运动激励分配）. 绕某轴的旋转在一阶近似下对瞬时转动中心沿该轴方向的位置失明：$\mathbf{C}_{\mathbf{b},X}$ 仅受纵摇与艏摇激励，$\mathbf{C}_{\mathbf{b},Y}$ 受横摇与艏摇激励，$\mathbf{C}_{\mathbf{b},Z}$ 受横摇与纵摇双重激励；故瞬时转动中心分量可辨识性纵轴（X）最弱、横轴（Y）居中、垂轴（Z）最优。

两域的瞬时转动中心系数块均为旋转算子的差分，其列激励结构相同，两域反演均呈现稳定的分量精度梯度：纵轴（X）最弱、横轴（Y）居中、垂轴（Z）最优。该梯度在第 3 章的仿真与第 4 章的实测中均被独立复现，是运动激励主导的固有特性。

3 双系统仿真验证与运动激励实验

3.1 仿真设置

仿真生成 300 s（5 min）完整船舶轨迹，采样频率 20 Hz，共 6001 个历元。各分量均方根误差定义为

$$\mathrm{RMS}_{\alpha}=\sqrt{\frac{1}{N_{\mathrm{eval}}}\sum_{m=1}^{N_{\mathrm{eval}}}\left[\widehat{C}_{b,\alpha}(t_m)-C_{b,\alpha}^{\mathrm{true}}(t_m)\right]^2},\quad \alpha\in\{X,Y,Z\}, \tag{32}$$

（评估间隔 5 s，单位 m）。可复现性声明：全部仿真结果由 MATLAB 程序生成（固定随机种子 rng=42，激励实验逐配置固定种子 [42,43,44,45,46]），全部参数见表 2，读者可据此复现全部数值结果。

表 2 可复现性仿真参数总表

项目	数值
轨迹	300 s、20 Hz、6001 历元； 平均航向 56.17°； 航速 2.94 m/s； ENU 岸基原点（30.0°N, 122.0°E）
转动	横摇 f=0.20 Hz（幅值 4°→10°）； 纵摇 f=0.18 Hz（3°→6°）； 艏摇 f=0.09 Hz（±2°）； 0–55 s 取 0.4/0.5 倍、55–65 s 线性过渡、其后满幅
平动	纵荡 0.10 m@0.10 Hz； 横荡 0.24 m@0.12 Hz； 垂荡 0.16 m@0.15 Hz； 叠加 2.94 m/s 匀速直航
CoR 真值	正弦基线 [1.2+0.5sin(2π·0.05t)，−0.3+0.3cos(2π·0.07t)，13.0+0.2sin(2π·0.10t)] m （Z_b 以设计水线为原点、向下为正）； 再叠加方向偏移：180–240 s 线性至 10 m（1/6 m/s）、 240–250 s 续至 20 m（1 m/s）、 其后保持 20 m，单位方向 [−0.2402, 0.8631, 0.4443]
布局 A（共面）	(52,-3,-10)、(-48,-3,-10)、(-48,7,-10)、(52,7,-10) m

项目	数值
布局 B（非共面）	同 A，仅天线 3 为 (-48,7,-20) m（桅顶，高出甲板 10 m）
GNSS 噪声	高斯-马尔可夫 τ=60 s； $\sigma_E=\sigma_N$=0.0759 m、σ_U=0.152 m
INS 速度噪声	白噪声σ_{EN}=0.02 m/s、σ_U=0.04 m/s（2:1）； 偏置 GM$\sigma_{b,EN}$=0.005、$\sigma_{b,U}$=0.01 m/s、τ_b=300 s
陀螺与姿态	角度随机游走（ARW） 0.1°/√h； 偏置 GM 3°/h（τ=100 s）； 常值偏置 5°/h； 姿态由陀螺积分漂移生成
反演设置	p=2； 位置域窗口 {1,5,9,13,17,21} s； 速度域 {5,9,13,17,21,25} s； 评估间隔 5 s
随机种子	主仿真 rng=42（twister）； 激励配置 [42,43,44,45,46]

3.2 双域精度汇总与讨论

固定 $p=2$，位置域在 {1,5,9,13,17,21} s、速度域在 {5,9,13,17,21,25} s 窗口上分别运行线性最小二乘求解。双域最优窗口分别为 13 s 与 17 s，表 3 汇总两条反演链路的特性与精度，图 3 给出双域 RMS 统计：

表 3 位置域与速度域反演链路特性与精度对比（最优窗口）

项目	位置域（多天线 GNSS）	速度域（多 INS）
观测量	天线 ENU 位置	INS 三向速度
姿态/角速度来源	Kabsch SVD（GNSS 基线）	基准 INS（陀螺）
观测噪声本底	cm 级（Gauss–Markov）	0.02 m/s 级（各向异性）
最优窗口T_w^*	13 s	17 s
均值 RMS（布局 A）	0.91 m	0.544 m
均值 RMS（布局 B）	0.92 m	0.547 m
误差主导项	噪声传播+截断偏差	截断偏差+姿态/角速度误差
长期稳定性	无累积误差（绝对基准）	零偏致缓变漂移
外部依赖	RTK 链路（远海或中断）	完全自主

国家高端交流平台

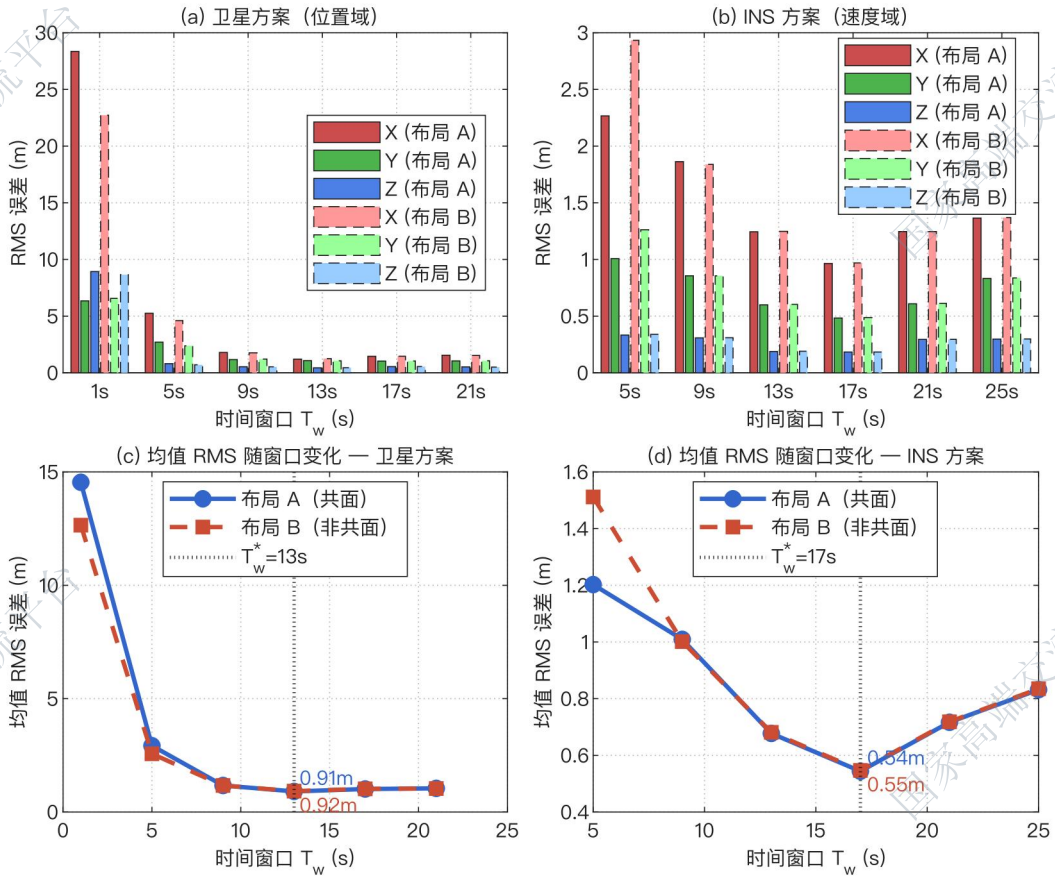


图 3 双域 RMS 统计：两方案在布局 A/B 与各候选窗口下的分量分组柱状图，附均值 RMS 曲线并标注最优窗口。

最优窗口下速度域均值 RMS（X/Y/Z 三分量 RMS 的算术平均；约 0.54 m）显著优于位置域（约 0.91 m），约为后者六成，分量精度梯度一致（X 最弱、Z 最优）。首要来源是速度噪声传播远小于位置噪声：INS 速度白噪声经窗口平均与最小二乘压缩后传播至瞬时转动中心仅约 0.02 m；GNSS 位置噪声属时间相关 Gauss–Markov 过程，有效独立样本缩减，经差分模型与设计矩阵求逆后显著放大；次要因素为速度域杆臂对旋转信号的放大效应与 INS 输出短时平滑性。误差分解表明，速度域反演误差主要由多项式截断偏差与姿态/角速度误差主导；INS 零偏只贡献很小的均值偏差，并非主导项（系统性均值偏差（含 Gauss-Markov 零偏与多项式截断两部分）为 [-0.024, +0.014, -0.013] m），这为第 5 章以 GNSS 校核 INS 零偏的融合策略提供定量依据。但该优势仅为短窗口瞬时精度优势：速度域输出依赖基准姿态与角速度，误差随时间累积且零偏引起缓变漂移，GNSS 位置域提供无累积误差的绝对基准，远海 RTK 中断时须由 INS 保持连续输出——两方案是“短期高精度（INS）”与“长期绝对基准（GNSS）”的互补关系。两布局在最优窗口下精度几乎一致（差异约 1%），但短窗口下非共面布局 B 优势明显（均值 RMS 2.57 m 对 2.92 m），工程应用应优先采用非共面四天线配置。计算效率上，单次 QR 分解每个评估点耗时约 0.01 s，完全满足实时需求。

3.3 运动激励实验

本节通过五档海况主实验与四组单自由度扰动实验，对结果 3（运动激励分

配）进行定量验证。回顾第 2.5 节的激励分配关系：各分量可辨识性取决于对其“可见”的旋转自由度，激励幅值越大可辨识性越强，过低则率先失效。提出四个待验证假设：H1（激励—响应非单调）——低海况噪声主导、中等海况最优、高海况截断偏差主导；H2（分量梯度随海况移动）——梯度压平但 X≫Y≫Z 排序保持；H3（最优窗口随海况迁移）——激励越强最优窗口越短；H4（单自由度传递严格遵循激励预期）——横摇不改善 $C_{b,X}$，纵摇可改善 $C_{b,X}$，艏摇呈中度改善。

构造五档海况（S1 平静/S2 轻浪/S3 中浪（基准）/S4 大浪/S5 巨浪），频率固定、仅扫描幅值，各档（横摇,纵摇,艏摇）为 (1,0.6,0.4)、(3,2,1)、(10,6,2)、(12,8,4)、(20,12,6)°，对应平动（纵荡,横荡,垂荡）为 (0.04,0.06,0.04)、(0.10,0.12,0.08)、(0.10,0.24,0.16)、(0.30,0.50,0.40)、(0.60,1.00,0.80) m，各档均含与主仿真一致的 55 s 幅值过渡段；机理实验每次仅一个转动自由度强激励、其余降至 S1 水平（E1 横摇/E2 纵摇/E3 艏摇/E4 全弱），另复算恒定幅值 S3 基准组交叉锚定（该组不含 55 s 幅值过渡段，故表 5 的 S3 与表 4 同名档位数值略有差异）。仅采用布局 B，窗口固定于基准最优值，每档 5 个固定噪声种子，X 分量 RMS 超 3 m（甲板作业容差上限）判为失效。五档海况下两方案瞬时转动中心 RMS 见表 4（双域两表合并），激励—响应曲线见图 4。

表 4 五档海况激励—响应主实验：双域瞬时转动中心 RMS 的 X 分量与均值（布局 B，位置域 $T_w = 13$ s、速度域 $T_w = 17$ s，均值 $\pm 1\sigma$（$n = 5$），单位 m）

海况	卫星方案（位置域）		INS 方案（速度域）	
	X RMS	均值 RMS	X RMS	均值 RMS
S1 平静	10.32±1.18	7.25	1.617±0.023	0.930
S2 轻浪	3.33±0.30	2.51	1.192±0.012	0.703
S3 中浪（基准）	1.31±0.07	0.96	0.984±0.018	0.563
S4 大浪	1.45±0.06	1.06	1.450±0.007	0.820
S5 巨浪	1.72±0.04	1.18	1.884±0.006	1.023

激励—响应形态上（H1）：两方案均值 RMS 均呈清晰的非单调 U 形，谷底同在 S3（INS 0.563 m、卫星 0.96 m），S1 弱激励噪声方差主导、S4/S5 强激励截断偏差主导而回升，H1 成立。分量梯度上（H2）：梯度随激励增强显著压平（卫星方案 X/Y 比值 1.44→1.28），但 X≫Y≫Z 排序全海况保持——“X 最弱”在本文海况下成立（但非普适，E2/E3 已给出反例），H2 部分成立。所有海况下 INS 方案均值 RMS 均低于卫星方案（尽管单看 X 分量在 S5 时 INS 可更高），比值由 S1 的 13% 升至 S5 的 87%（强激励下陀螺误差积分传播的姿态失准加剧，而卫星方案对摆幅不敏感）。失效条件：卫星方案 X 分量在 S1（10.32 m）与 S2（3.33 m）失效，S3 起达标；INS 方案全海况达标（最差 S5 的 1.884 m）——平静至轻浪海况下纯卫星方案纵向瞬时转动中心不可用，INS 方案全海况可用。

国家高端交流平台

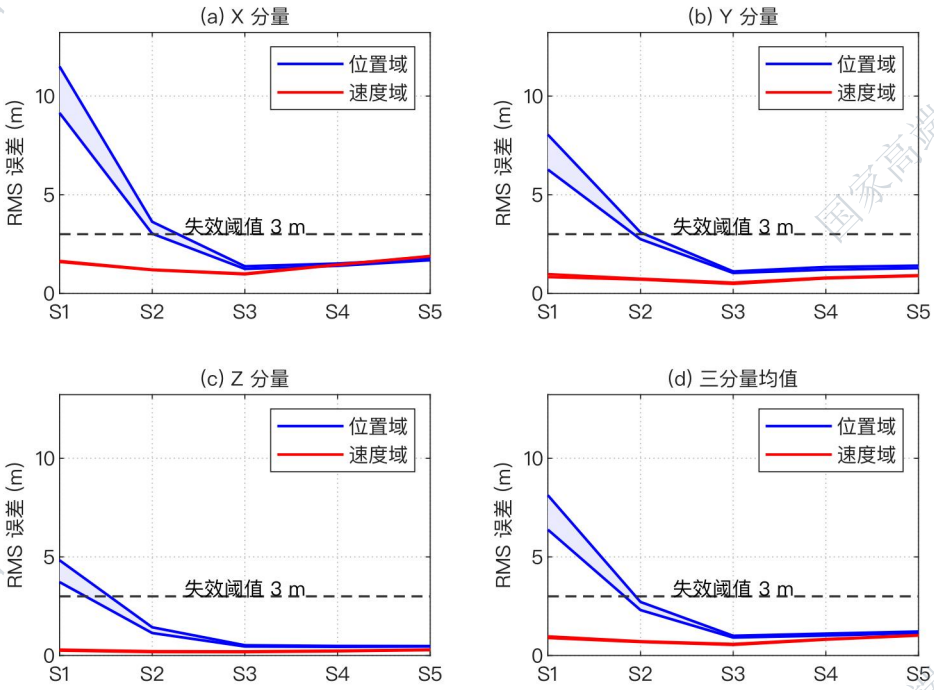


图 4 五档海况激励—响应曲线（布局 B，$n = 5$）：X、Y、Z 三分量及其均值，含 3 m 失效阈值。

机理实验逐项验证了激励预期的传递关系（图 5，H4 成立）：横摇增强十倍对 $C_{b,X}$ 无任何改善（E1，与 E4 全弱组相当），而 $C_{b,Y}$、$C_{b,Z}$ 分别改善 87%、86%——绕纵轴旋转对纵向位置失明得到直接定量验证；纵摇是改善 X 分量的唯一强激励源（E2，卫星方案 $C_{b,X}$ 降幅 91%）；艏摇对 $C_{b,X}$、$C_{b,Y}$ 呈中度改善（E3：位置域 −62%/−68%），且改善量级受幅值限制；全弱激励下三分量均退化、X 率先失效（E4，双方案双双越过失效线）——INS 方案对激励不足亦非免疫。全部预测关系在两域同时成立（表 5），与观测量类型无关，再次确认其运动学本质；该规律在实测双系统差值 RMS 中同样复现（第 4.2 节）。

国家高端交流平台

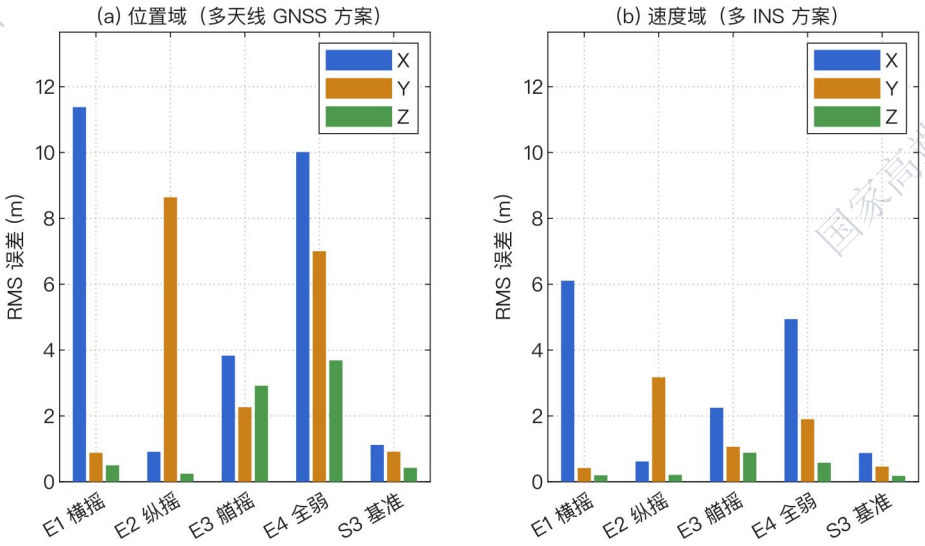


图 5 单自由度激励传递验证（布局 B，$n = 5$）：位置域与速度域的 X/Y/Z 分量 RMS 分组柱状图。

表 5 激励预期关系验证汇总（E4 全弱组为对照基准；表中数值为 RMS 相对 E4 组的变化率 $RMS/RMS_{E4} - 1$，负值为改善、正值为退化）

待验证关系	理论预期（第 2.5 节）	位置域结果	速度域结果	结论
$C_{b,X}$ ← 纵摇、艏摇	E2 的 $C_{b,X}$ 显著改善；E1 的 $C_{b,X}$ 无改善	E2：−91%；E1：+14%（无改善）	E2：−87%；E1：+24%（无改善）	成立
$C_{b,Y}$ ← 横摇、艏摇	E1 的 $C_{b,Y}$ 显著改善；E2 的 $C_{b,Y}$ 无改善	E1：−87%；E2：+23%（无改善）	E1：−78%；E2：+67%（无改善）	成立
$C_{b,Z}$ ← 横摇、纵摇	E1、E2 的 $C_{b,Z}$ 均改善；E3 的 $C_{b,Z}$ 无改善	E1：−86%；E2：−93%；E3：−21%（弱）	E1：−66%；E2：−63%；E3：+53%（无改善）	成立
艏摇轻度改善 $C_{b,X}$、$C_{b,Y}$	E3 的 $C_{b,X}$、$C_{b,Y}$ 轻度改善；量级受幅值限制	$C_{b,X}$：−62%；$C_{b,Y}$：−68%	$C_{b,X}$：−54%；$C_{b,Y}$：−44%	成立
全弱激励退化	E4 三分量均退化；X 最差且率先失效	10.01/7.00/3.69 m；X 失效	4.940/1.901/0.578 m；X 失效	成立
双域一致性	上述关系在两域同时成立	位置域与速度域结论逐项一致		成立

工程应用上：以均值 RMS 低于 3 m 且 X 分量不失效为标准，卫星方案要求纵摇稳态摆幅达 S3 量级（约 6°），S2 及以下海况其纵向瞬时转动中心不可用；INS 方案 S1 平静海况仍满足要求，其可用下限同样由激励水平决定。机动建议：纵摇激励是改善 X 分量的最高效手段；海况低于 S2 且需保障纵向精

度时，可通过周期性艏向微调（±4° 级正弦机动）注入艏摇激励，或以加减速/纵倾配载诱导纵摇响应。任务规划阶段可依激励预期关系预判分量精度排序（X 由纵摇与艏摇决定、Y 由横摇与艏摇决定、Z 由横摇与纵摇决定）。本节建立了“海况参数（船舶运动激励）→瞬时转动中心辨识精度”的可预测、可干预、模式无关的定量桥梁；H3（最优窗口随海况迁移）因本节窗口固定的控制变量设计未获直接数据支撑，S4/S5 的精度回升与饱和形态仅提供方向性间接证据，窗口—海况联合寻优留待后续工作；主要局限为频率全部固定、平动幅值按比例缩放属近似处理，精确关系需结合船舶水动力 RAO 进一步标定。此外，本实验采用固定随机种子以保证可复现（每配置 5 个种子）；本版不报告置信区间与显著性检验，较浅的窗口极小值应结合条件数分析解读，而非视为精确最优。图 1、图 2 的无约束曲面本身即构成对照基线：若无多项式约束，适应度完全平坦，故比较已隔离约束本身的作用。

4 海上实船初步一致性评估

在本研究完成前，研究团队已完成一次海上实船测绘，将多天线 GNSS 方案装置部署于实船，对理论分析与仿真结论进行实境检验。本节遵循初步一致性评估原则：实船环境无法获得瞬时转动中心独立真值，以双系统互一致性作为替代度量，仅以处理流程与评价方法的完整说明保证可复现性；图 6 给出的双系统差异为相对量，瞬时转动中心真值在差值中抵消，不含绝对位置信息。

4.1 测绘概况与试验方案

测绘期间，在船体甲板平面不同位置安装三副 GNSS 天线（共面布局，下称天线一、天线二、天线三），岸上固定点架设基准站作为 RTK 相对定位坐标原点；船舶姿态由船载主机 INS 提供（以短时相对变化精度作趋势基准）。观测涵盖连续数小时自然海况下的六自由度运动，数据以真实采样率记录，包含传感器不同步、多路径、标定残差等实际因素。处理前先对三副天线做独立的数据质量核查（判据与结果见 4.4 节），其中一副存在与艏摇角速度成比例的定位偏移，在方案 4 的融合中予以剔除。实测数据处理采用两种模式共五种方案，统一执行时间插值对齐、滑动窗口多项式约束、线性最小二乘反演：模式一（GNSS 与 INS 融合）下方案 1–3 为单天线方案、方案 4 联合余下两副天线与主机 INS 加权融合；模式二（纯 GNSS）下方案 5 姿态由 Kabsch 独立解算。反演后另以姿态路径长度定权对序列作 Savitzky–Golay 平滑（纯后处理，结果另存）；天线融合权重取杠杆臂长度与窗口残差精度之积，平滑窗长取 241 s（反演窗口 30 s 的约 8 倍），五种方案统一参数以保证公平；图 6 使用未平滑的原始反演序列。

4.2 实测结果与双系统互一致性

五种方案均成功输出连续瞬时转动中心时间序列，全程无发散。单天线方案（1–3）存在与安装位置相关的中心值偏移但趋势一致；多天线加权融合方案（方案 4）表现最佳——其按杠杆臂与残差精度定权的机制使长基线天线主导，匹配程度、互一致性与残差稳定性均最优，应作为工程首选（该机制对随机性离群有效，但对系统性偏移会因长杠杆臂而放大，见 4.4 节）；纯多天线方案（方案 5）因共面安装致姿态条件数退化，并叠加多路径与杆臂标定残差（几何可辨识但病态），输出明显失配，不具备工程可用性——表明纯 GNSS 模式宜优先采用非共面布局以提高稳健性。各方案瞬时转动中心估计均呈现与仿真一致的分量排序

（X 最弱、Y 居中、Z 最优）。

缺乏真值条件下，本节以双系统互一致性为替代度量。图 6 展示卫星方案 4 与 INS 方案瞬时转动中心估计差值的滑动窗口 RMS（窗口 60 s，稳态为 60 个采样点，首尾窗口采用收缩端点；真值在求差时抵消）。求差前先将 INS 方案的 Y（左舷）、Z（船顶）取负，统一至卫星方案的右舷/船底约定（原点相同）；“显著生摇时段”的判据为 Z 分量滑窗 RMS 低于 3 m 且持续不少于 5 min。需要说明的是，方案 4 的姿态信息部分来自船载主机 INS，两套方案之间存在一定的共源误差，图中所示差值会小于两系统实际的不一致程度。全程差值 RMS 为 X 向 46.8 m、Y 向 22.6 m、Z 向 13.1 m；低激励时段峰值 106.6 m，高激励时段谷值降至 9.0 m（出现在 17:12:54）。图 6 黄底标注的显著生摇时段（“生摇”指通过减摇鳍等装置主动激励船舶产生摇荡的试验工况，此处为强横摇激励工况，共 3 段）中，三段合并差值为 X 向 46.6 m、Y 向 11.8 m、Z 向 1.25 m（图 6(b)）；其中最后一段（17:05:55–17:20:16，861 s）的差值 RMS 为 X 向 34.1 m、Y 向 8.2 m、Z 向 0.64 m。差值绝对量级显著大于仿真预期，源于实船未建模因素叠加，故仅作相对比较指标；工程上有意义的表征是最后一段强横摇内的 Z 向差值 0.64 m，仅为全程 13.1 m 的 5%。

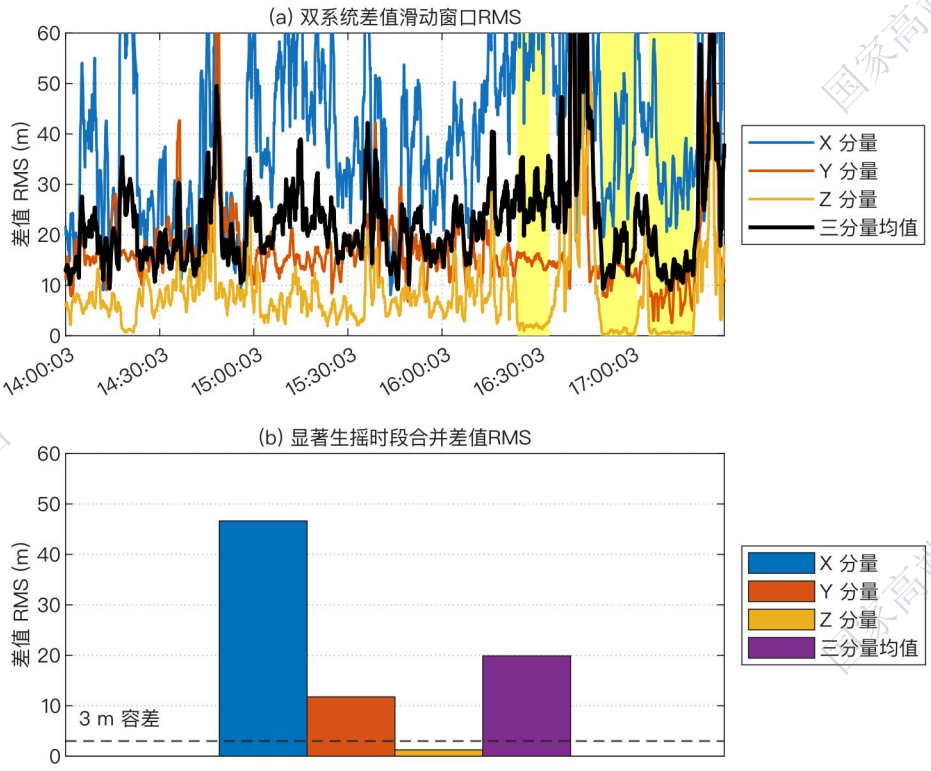


图 6 双系统瞬时转动中心估计差异的滑动窗口 RMS（海上实测：卫星方案 4 对 INS 方案，窗口 60 s）。曲线在 60 m 处截断；106.6 m 峰值在量程外。

4.3 强横摇段的分量改善梯度

最后一段强横摇（17:05:55–17:20:16，861 s）内，X/Y/Z 向差值 RMS 分别为 34.1 m、8.2 m 与 0.64 m，相对全程 46.8 m、22.6 m 与 13.1 m 的降幅分别

为 27%、64% 与 95%。改善幅度沿 X→Y→Z 单调递增，与图 5 中 E1 组（仅横摇强）的激励传递关系吻合：横摇激励只能小幅改善 Cb,X（绕纵轴的旋转对纵向位置一阶近似下接近失明），却能显著改善 Cb,Y 与 Cb,Z——尤其 Z 向降至全程的 5%，从实船角度独立复现了运动激励分配理论。需要说明的是，E1 组为仅横摇的单自由度工况，而实船该段还含纵摇与艏摇分量，故 Cb,X 仍有 27% 的改善，E1 组则近乎无改善；两者在分量排序上一致，幅度差异源于激励构成的差别。

4.4 数据质量核查与天线剔除

在双系统对比之前，先对三副天线做独立核查，判据不依赖两方案的差值。其一，三副天线固连于同一刚体，两两距离应恒定：实测天线一与天线三之间全程仅变化 1.35 cm、天线二与天线三之间稳定在 15 cm 内，而天线一与天线二之间变化达 6.19 m，且该变化与艏摇角速度严格成正比（$R^2 = 0.9991$，比例 9.8 m/(°/s)）。

其二，三副天线各自独立解得的垂向分量 Cb,Z 分别为 13.98、15.77 与 13.84 m，天线二高出另两副 1.86 m，却因杠杆臂最长（124.8 m）在加权融合中占据 53% 的权重。其三，把天线二的权重平均分给另两副，融合值为 13.908 m，与仅用两副天线实测的 13.913 m 相差 5 mm——偏差可完全由天线二一侧解释。

据此，在方案 4 的加权融合中剔除该副天线（方案 1–3 与纯 GNSS 方案 5 仍按三副记录，仅用于诊断布局效应）。按图 6 最后一段强横摇的同一时段复算，Z 向差值由 2.08 m 降至 0.64 m，与图 6 一致。

4.5 局限性与实测结论

海试差值比仿真结果大两个数量级的原因诊断如下。由于两条处理链共享主 INS 姿态基准，差值不是精度指标；两域虽取相同的反演窗口（30 s）与平滑窗长（241 s），但对共享姿态的使用方式不同，对缓慢迁移的 CoR 仍会引入与传感器误差无关的处理偏差；以下为诊断性误差预算（表 6，非闭合定量分解），故本实验仅作为初步一致性评估，不作为独立验证。

表 6 海试双系统 CoR 差值的误差来源与传播分析（诊断性误差预算）

误差源	机理与传播	预期作用
姿态/角速度误差×杠杆臂	两域对共享姿态的使用方式不同（位置域仅经旋转矩阵作用于天线杆臂，速度域还经角速度叉乘），共源误差不完全抵消；海试姿态由船载主 INS 提供，亚度级（约 0.1°）误差经数十米杆臂仅产生厘米至分米级 CoR 偏差	系统性小量
共面天线几何	秩 2 基线仍可辨识但条件数差，放大 X 分量误差；比“姿态歧义”更合理地解释方案 5 失效	显著放大项
时间同步	δt×船速/角速度导致历元错配的位置与速度估计	系统性缓变
RTK 基线与多路径	甲板/桅杆反射导致的相关 GNSS 误差超出仿真 GM 模型	海上显著
杠杆臂标定残差	天线/INS 安装误差直接映射为 CoR 偏差	系统性
未建模结构/环境效应	船体挠曲、振动、海况非平稳，仿真未包含	次要

注：T_{geo} 为 CoR 的 ENU 位置，v_{CoR} 为其平动速度。

国家高端交流平台

本次实测存在以下局限：无法获得瞬时转动中心独立真值，精度评价基于互一致性等替代度量；姿态基准仅用主机 INS 相对变化；剔除一副天线后余下两副近共线（间距 15.5 m），非共面或大孔径布局的实船增益待后续验证；结论基于单次测绘的特定船舶与海况，外推应保持谨慎；多天线 GNSS 安装位置下方未布设对应 INS 节点，速度域方案的独立实船验证有待后续试验（本次利用实船既有非共面 INS 节点反演，两种方案瞬时转动中心一致性非常高，尤其减摇鳍主动生摇工况下 Z 向惊人地吻合，差值 0.64 m）；差值 RMS 绝对量级受未建模因素影响，仅作相对比较。上述局限不改变本节结论的相对比较性质。综合本次海上实船测绘，真实海洋环境复现并巩固了仿真结论：瞬时转动中心各分量辨识精度由运动激励主导、纵轴为固有薄弱环节；多天线 GNSS 与 INS 加权融合是最稳健的工程方案；纯 GNSS 模式宜优先采用非共面天线布局以提高稳健性。这为甲板相对导航基准的实船应用提供了直接依据，后续将补充非共面实船配置、扩展海况覆盖，并推进窗口自适应与实时嵌入式部署。

5 双系统融合策略

位置域（多天线 GNSS）与速度域（多 INS）方案基于完全独立的物理观测量，误差特性互补：GNSS 定位厘米级、无累积误差，但远海 RTK 可能中断；INS 短期精度高、全天候自主，但零偏引起缓变漂移。两链路输出汇入融合模块，策略为三阶段：近岸校核（以卫星方案估计 INS 等效速度零偏并反馈扣除）、远海自主（INS 以校准零偏独立运行保持连续）、再校准（返回近岸时更新零偏估计）。该策略直接回应零偏所致缓变偏差（该偏差在仿真中很小，仅 [-0.024, +0.014, -0.013] m；但仿真主导误差项为多项式截断偏差，单靠融合不能消除）。深度融合（以瞬时转动中心与 INS 零偏为状态的卡尔曼滤波）可作为后续工作方向。

6 结论

瞬时转动中心反演的本质困难是规范不变性：仅凭船体测点的位置或速度观测，平动量与瞬时转动中心在无约束条件下不可分离。本文以多项式约束平动模型破缺该不变性，将反演转化为普通线性最小二乘并获得闭式全局最优解；框架对多天线 GNSS（位置域）与多 INS（速度域）观测严格对偶成立。六自由度仿真表明，INS 方案瞬时转动中心均方根误差为 0.54 m，约为卫星方案的六成，满足甲板作业精度要求；两域均稳定复现纵轴最弱、垂轴最优的分量精度梯度，与运动激励分配理论一致。五档海况激励实验揭示辨识精度随激励增强呈非单调变化，单自由度机理实验确认横摇不能改善 X 向而纵摇可以改善 X 向的传递关系。海上实船测绘在真实海况中复现了上述梯度结论：最后一段强横摇内两方案反演瞬时转动中心在 Z 向上惊人地吻合（差值 0.64 m），Y 向次之（8.2 m），X 向仍为 34.1 m，分量改善梯度的排序与仿真一致。

本研究方法无需船舶动力学模型，可适配多种船体测点，仅需固定岸基参考站提供坐标基准；近岸校核 INS 零偏、远海自主运行的融合策略保证了瞬时转动中心估计的连续可用性。局限性已在第 4.4 节等处分散说明。后续工作将聚焦窗口—海况自适应调整、非共面实船配置与实时嵌入式部署。

参考文献

[1] FOSSEN T I. Handbook of marine craft hydrodynamics and motion control[M]. Chichester: John Wiley & Sons, 2011.

[2] TEUNISSEN P J G. Integer least-squares theory for the GNSS compass[J]. Journal of Geodesy, 2010, 84(7): 433-447.

[3] GIORGI G, TEUNISSEN P J G, VERHAGEN S, et al. Instantaneous ambiguity resolution in global-navigation-satellite-system-based attitude determination applications: a multivariate constrained approach[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2012, 35(1): 51-67.

[4] HENKEL P. Tightly coupled precise point positioning and attitude determination[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2015, 51(4): 3182-3197.

[5] TEUNISSEN P J G, GIORGI G, BUIST P J. Testing of a new single-frequency GNSS carrier phase attitude determination method: land, ship and aircraft experiments[J]. GPS Solutions, 2011, 15(1): 15-28.

[6] ZOU T, ZENG W, YANG W, et al. An adaptive robust cubature Kalman filter based on Sage-Husa estimator for improving ship heave measurement accuracy[J]. IEEE Sensors Journal, 2023, 23(9): 10089-10099.

[7] TITTERTON D H, WESTON J L. Strapdown inertial navigation technology[M]. 2nd ed. London: Institution of Engineering and Technology, 2004.

[8] GROVES P D. Principles of GNSS, inertial, and multisensor integrated navigation systems[M]. 2nd ed. Boston: Artech House, 2013.

[9] TEUNISSEN P J G, MONTENBRUCK O, ed. Springer handbook of global navigation satellite systems[M]. Cham: Springer International Publishing, 2017.

[10] KABSCH W. A solution for the best rotation to relate two sets of vectors[J]. Acta Crystallographica Section A, 1976, 32(5): 922-923.

[11] BESL P J, MCKAY N D. A method for registration of 3-D shapes[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1992, 14(2): 239-256.

[12] GARCÍA-DE-VILLA S, JIMÉNEZ-MARTÍN A, GARCÍA-DOMÍNGUEZ J J. Novel IMU-based adaptive estimator of the center of rotation of joints for movement analysis[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2021, 70: 1-11.

[13] WANG Q, YAN P, JIANG J, et al. Online estimation of the mounting angle and the lever arm for a low-cost embedded integrated navigation module[J]. Remote Sensing, 2024, 16(16): 3064.

[14] YODER J E, HUMPHREYS T E. Low-cost inertial aiding for deep-urban tightly coupled multi-antenna precise GNSS[J]. NAVIGATION: Journal of the Institute of Navigation, 2023, 70(1): navi.561.

[15] IXBLUE. PHINS subsea inertial navigation system: technical datasheet[Z]. Paris: iXBlue, 2020.

[16] NOVATEL. IMU errors and their effects: application note APN-064[Z]. Calgary: NovAtel Inc., 2014.

[17] IEEE. IEEE Std 952-1997. IEEE standard specification format guide and test procedure for single-axis interferometric fiber optic gyros[S]. New York: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1997.

[18] ANALOG DEVICES. MEMS IMU ADIS16490: tactical grade, six degrees of freedom inertial sensor: data sheet[Z]. Norwood: Analog Devices, Inc., 2018.

国家高端交流平台

[19] BOWRING B R. Transformation from spatial to geographical coordinates[J]. Survey Review, 1976, 23(181): 323-327.

作者简介

郭森鑫，男，1998 年生，助理工程师，研究方向：船舶导航技术、多天线 GNSS 定姿、GNSS/INS 组合导航、船舶运动参数估计，以及导航设备的嵌入式系统部署，E-mail：senxin.guo@qq.com。

黄斌，男，1991 年生，高级工程师，研究方向：聚焦于舰载航空保障系统设计，同时涉及船舶甲板作业的安全性分析，E-mail：827469891@qq.com。

王明丰，男，1981 年生，研究员，研究方向：包括舰载系统总体设计、甲板作业运动预测，以及舰载机起降过程的动力学仿真与实验验证，E-mail：2812765556@qq.com。

作者贡献声明

郭森鑫：负责研究构思、理论推导、算法设计与仿真验证，并撰写论文初稿。

黄斌：负责海上试验组织与实测数据分析，提供试验资源，并参与论文审阅与修订。

王明丰：负责实验设计与机理分析，提供试验资源，并参与论文审阅与修订。

国家高端交流平台